

Probabilités

1. Un peu de vocabulaire

Définitions

1. Une **expérience** est dite **aléatoire** si
 - son résultat est imprévisible
 - on connaît avant l'expérience tous les résultats possibles (on peut donc les énumérer, les dénombrer)
2. On appelle **issue** le résultat d'une expérience aléatoire.
3. L'ensemble de toutes les issues d'une expérience se nomme **l'univers** de l'expérience **aléatoire**. On le note U .
4. Un **évènement** est un sous-ensemble de l'univers. Il contient les **issues favorables** (qui réalisent l'évènement) d'une expérience aléatoire. On le note par une lettre majuscule.

Exemple 1

Lancer un dé est une expérience aléatoire. Lorsqu'il s'immobilise il indique une issue.

L'univers de cette expérience est $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ issues possibles

Obtenir un nombre pair est un évènement : $E = \{2; 4; 6\}$ issues favorables

5. Un **évènement** peut-être :
 - **impossible** : s'il ne compte aucune issue, $E = \emptyset$.
 - **simple** ou **élémentaire**, s'il ne contient qu'une issue favorable.
 - **composé**, s'il contient plusieurs issues favorables.
 - **certain**, si toutes les issues sont favorables, $E = U$.

2. Approche intuitive de la notion de probabilité

Reprenons cette expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé non pipé, chaque face aura une probabilité égale de sortir (1 chance sur 6). On peut donc dire que la probabilité d'une face est de $\frac{1}{6}$.

Dans cette même expérience, la probabilité d'obtenir un nombre pair est de $\frac{1}{2}$ car il y a 3 issues favorables parmi les 6 issues possibles.

Plus généralement :

Pour calculer la probabilité qu'un évènement E se réalise lors d'une expérience aléatoire, on calcule :

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

si toutes les issues sont équiprobables, c'est à dire ont toutes la même probabilité de se réaliser.

en fait $P(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de } E}{\text{nombre d'éléments de } U} = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(U)} = \frac{\#(E)}{\#(U)}$

signifie le "nbre d'éléments de"

Propriétés :

1. une probabilité est comprise entre 0 et 1 : $0 \leq P(E) \leq 1$.
2. 0 indique que l'issue est impossible et 1 qu'elle est certaine.
3. Une probabilité est notée sous forme d'un nombre, d'une fraction ou d'un pourcentage.

Exemple 2

On lance simultanément deux dés de couleurs différentes et on considère les évènements suivants : $U = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$ $\#U = 36 = \text{nbre d'issues possibles}$

A : "obtenir une somme de 15" $A = \emptyset$ $\#A = 0$ c'est un évènement impossible

B : "obtenir une somme de 12" $B = \{(6,6)\}$ $\#B = 1$

C : "obtenir une somme de 8" $C = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$ $\#C = 5$

D : "obtenir une somme supérieur à 1" $D = U$ $\#D = 36$ c'est l'évènement certain

$$\Rightarrow P(A) = \frac{0}{36} = 0$$

$$P(B) = \frac{1}{36}$$

$$P(C) = \frac{5}{36}$$

$$P(D) = \frac{36}{36} = 1$$

Exemple 3

On dispose de 26 jetons, gravés avec les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois jetons.

issues possibles : $A_3^{26} = 15'600$

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot de 3 consonnes? # issues favorables A_3^{20}

$$\Rightarrow \frac{A_3^{20}}{A_3^{26}} = \frac{6840}{15600} \approx 0,4385 \approx 43,85\%$$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot BAC # issue fav. : $\frac{B}{1} \cdot \frac{A}{1} \cdot \frac{C}{1} = 1$

$$\frac{1}{A_3^{26}} = \frac{1}{15'600} \approx 0,000064 \approx 0,0064\%$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot BAC ou l'une de ses anagrammes

$$\frac{P_3}{A_3^{26}} = \frac{6}{15'600} \approx 0,000385 \approx 0,0385\%$$

Exemple 4

On tire 4 cartes dans un jeu de 36 cartes.

issues possibles $C_4^{36} = 58'905$

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 piques? # issues favorables C_4^9

$$\Rightarrow \frac{C_4^9}{C_4^{36}} = \frac{126}{58'905} \approx 0,0021 \approx 0,21\%$$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique?

$$\frac{C_1^1 \cdot C_3^{35}}{C_4^{36}} = \frac{6545}{58'905} = 0,11 = 11,1\%$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 pique? *tout - aucun*

$$\frac{C_4^{36} - C_4^{27}}{C_4^{36}} = 1 - \frac{C_4^{27}}{C_4^{36}} = 1 - \frac{17550}{58'905} \approx 0,702 \approx 70,2\%$$

d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 piques? *tout - aucun - 1 pique.*

$$1 - \frac{C_4^{27}}{C_4^{36}} - \frac{C_1^9 \cdot C_3^{27}}{C_4^{36}} \approx 0,255 \approx 25,5\%$$

$\approx 0,702$ $\approx 0,447$

c)

ex 4.2.1
 $\rightarrow$ 4.2.8
 sauf 7
 Δ 4.2.3 et 6
 sans success-

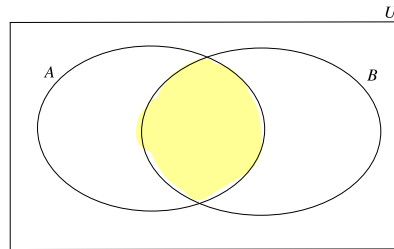
3. Approche mathématique de la notion de probabilité

Par analogie avec le langage ensembliste, on a les définitions et notations suivantes :

Définitions

Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et A et B deux événements.

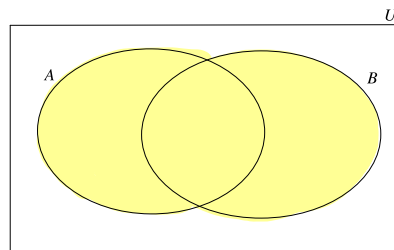
1. l'événement " **A et B** ", noté $A \cap B$, se réalise lorsque A et B se réalisent en même temps.



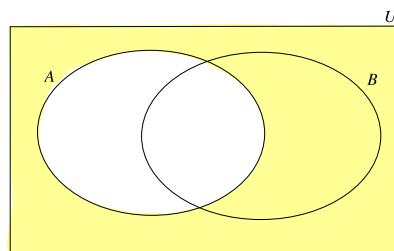
2. l'événement " **A ou B** ", noté $A \cup B$, se réalise lorsque au moins un des deux événements A ou B se réalise.

ou inclusif :
A ou B ou les deux

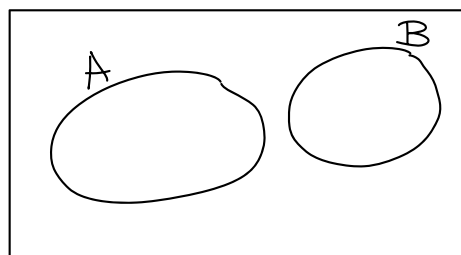
($\neq$ ou exclusif :
soit A soit B)



3. l'événement "**non A** ", noté $\bar{A}$, est l'événement complémentaire de A et se réalise lorsque A ne se réalise pas.



4. Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Dans ce cas, $A \cap B = \emptyset$



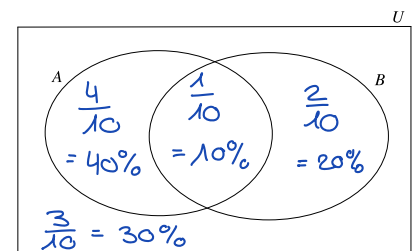
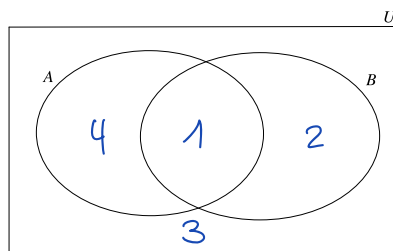
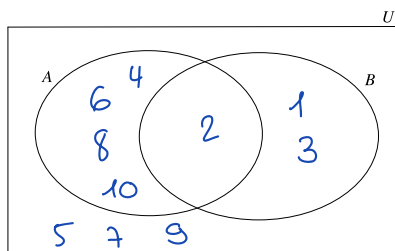
Exemple 5

On choisit un nombre entre 1 et 10 au hasard et on considère les événements suivants :

A : "obtenir un nombre pair" et B : "obtenir un nombre inférieur à 4"

Représenter cette situation en notant :

- tous les éléments dans le premier diagramme de Venn ci-dessous ;
- le nombre d'éléments de chaque plage dans le deuxième ;
- les probabilités de chaque plage dans le troisième.



$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{10}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{B}) = \frac{7}{10}$$

$$P(\overline{A \cap B}) = \frac{9}{10}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{10}$$

$$P(U) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Axiomes de probabilité

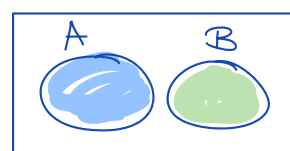
Soit U l'univers d'une expérience aléatoire.

A chaque événement A , une probabilité associe un nombre réel $P(A)$ satisfaisant les axiomes suivants :

- $P(A) \geq 0$
- $P(U) = 1$
- Si A et B sont **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$)
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P: U \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto P(A)$$



Propriétés d'une probabilité

1. Valeur de la probabilité d'un événement

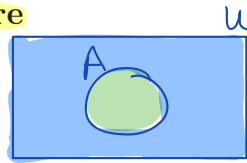
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. Probabilité de l'événement contraire

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

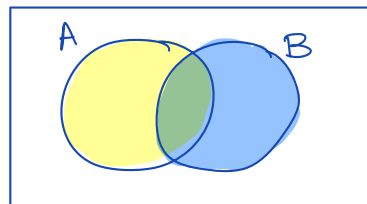
"tout - contraire"



3. Probabilité d'une union de deux événements (ou d'une réunion d'événements)

Pour deux événements A et B quelconques

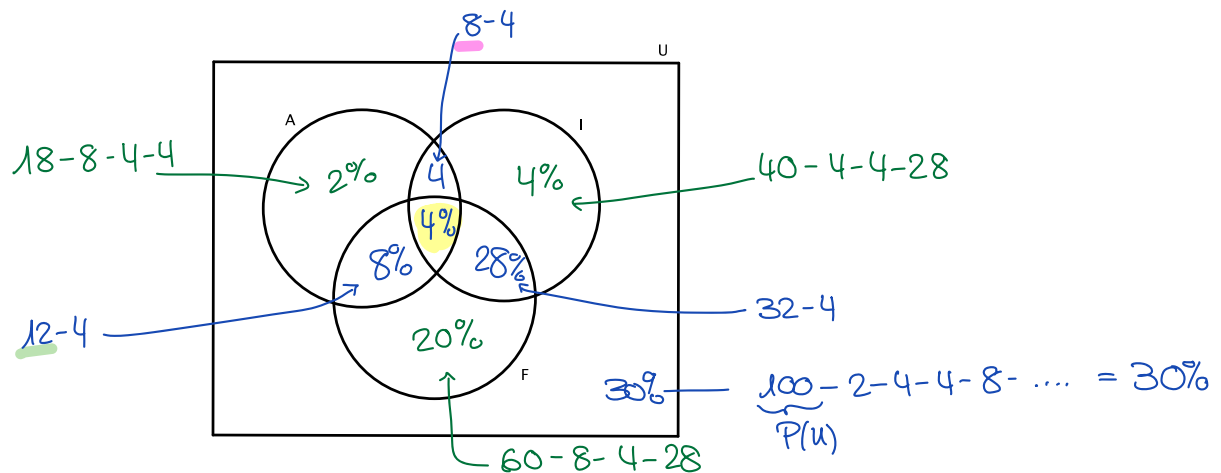
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Si on calcule $P(A) + P(B)$ on compte à double $P(A \cap B)$.
C'est pourquoi on doit le soustraire une fois.

Exemple 6

Dans le camping, 60% des vacanciers comprennent au moins le français, 40% au moins l'italien, 18% au moins l'anglais, 32% au moins le français et l'italien, 12% au moins le français et l'anglais, 8% au moins l'italien et l'anglais et 4% comprennent les trois langues.



Compléter le diagramme de Venn de la situation et la probabilité qu'un vacancier comprenne...

a) l'anglais 18%

c) exactement 2 de ces 3 langues

$$4 + 8 + 28 = 40\%$$

b) l'anglais uniquement 2%

d) au moins 2 des 3 langues

$$40 + 4 = 44\%$$

e) aucune de ces 3 langues : 30%
100% - 70%

(ex 4.2.10 ou exple)
ex 4.2.9 / 14 → 16