

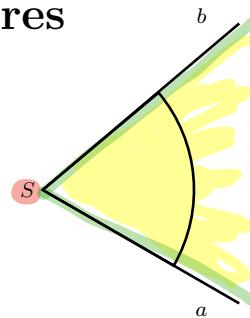
Chapitre 1

Trigonométrie 1

1.1 Angles, arcs et sections circulaires

Angle

Deux demi-droites Sa et Sb qui ont même origine S définissent un angle. Le point S est le **sommet** de l'angle, les demi-droites Sa et Sb sont les **côtés**.



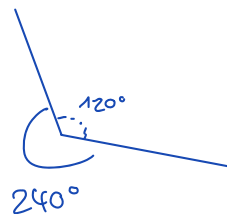
Mesures d'un angle

Mesures en degrés

- Un tour mesure 360 degrés (noté 360°)
- Un angle de k° s'obtient en considérant k fois $\frac{1}{360}$ de tour

Exemples :

- À l'aide du rapporteur, mesurer l'angle ci-dessus : 70°
- À l'aide du rapporteur, tracer un angle de 240° :



Degrés sexagésimaux

Comme pour les heures, on divise 1 degré en 60 parties égales, appelées **minutes** ($1^\circ = 60'$) et chaque minute en 60 parties égales, appelées **secondes** ($1' = 60''$) :

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

Handwritten annotations: $\cdot 60$ (from 1° to $60'$), $\cdot 3600$ (from 1° to $3600''$), $\div 60$ (from $3600''$ to $60'$), $\div 3600$ (from $3600''$ to 1°).

Exemples :

- Convertir $12,345^\circ$ en degrés, minutes, secondes :

$$0,345 \cdot 60 = 20,7' \quad 0,7 \cdot 60 = 42 \quad \Rightarrow 12^\circ 20' 42''$$

(ou DD \rightarrow DMS)

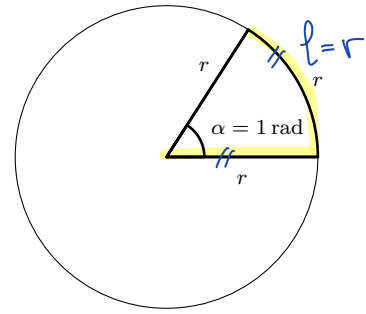
- Convertir $126^\circ 9' 5''$ en degrés décimaux :

$$126^\circ + \frac{9}{60} + \frac{5}{3600} \approx 126,1514^\circ \quad (\text{ou DMS} \rightarrow \text{DD})$$

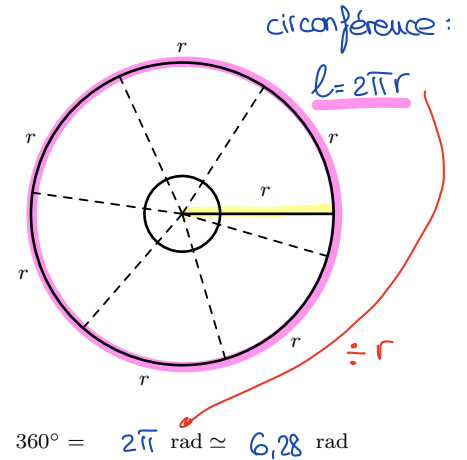
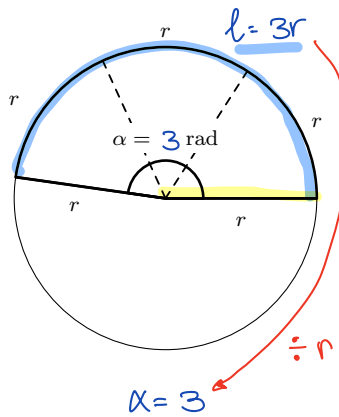
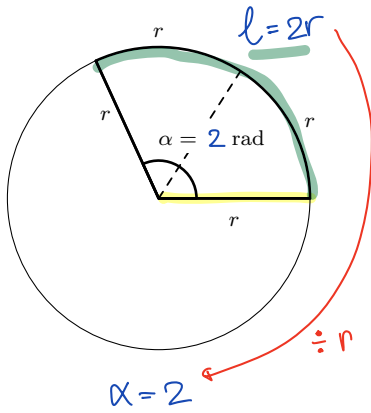
126.0505

Mesure en radians

Un angle α , qui découpe sur un cercle de rayon r un arc de longueur r , a une mesure de **1 radian**, noté **1 rad**.

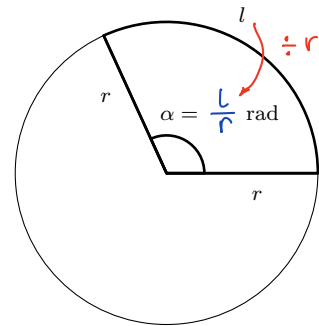


Exemples :

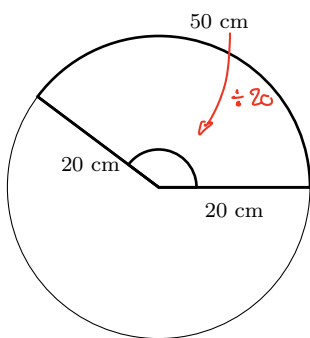


La mesure en **radians** d'un angle α est le rapport $\frac{l}{r}$ de la longueur l de l'arc de cercle découpé par l'angle α sur un cercle de rayon r centré au sommet de l'angle.

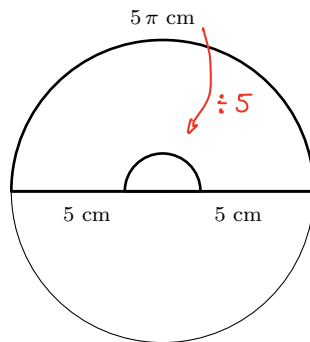
$$\alpha = \frac{l}{r} \text{ rad}$$



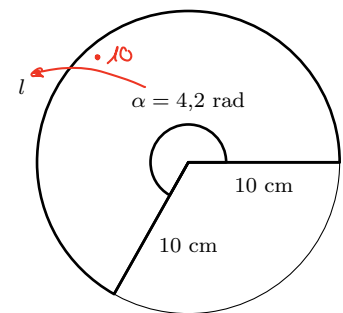
Exemples :



$$\alpha = \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ rad}$$



$$\alpha = \frac{5\pi}{5} = \pi \text{ rad} \approx 3,14 \text{ rad}$$



$$l = 4,2 \cdot 10 = 42 \text{ cm}$$

Conversion des mesures d'angles

On note d la mesure d'un angle en degrés et r la mesure en radians.

⚠ $r \neq$ rayon ici mais $r =$ la mesure d'un angle en radian

Degrés	360	180	d	$d = r \cdot \frac{180}{\pi}$
Radians	2π	π	$r = d \cdot \frac{\pi}{180}$	r

On fait une règle de 3

Exemples :

a) $53,6^\circ \neq 53,6 \cdot \frac{\pi}{180} \cong 0,94 \text{ rad}$

b) $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

c) $2,35 \text{ rad} \neq 2,35 \cdot \frac{180}{\pi} \cong 134,65^\circ$

d) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ$ ou $\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$

ex 1.3
1.4

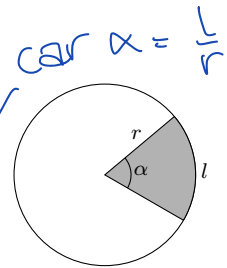
Longueur d'un arc, aire d'un secteur circulaire

ici $r =$ rayon

Longueur d'un arc :

Aire d'un secteur circulaire :

α (en degrés)	α (en radians)
$l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$	$l = \alpha \cdot r$
$\sigma = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$	$\sigma = \frac{1}{2} r l = \frac{1}{2} \alpha r^2$



Exemples :

a) $r = 12 \text{ cm}$
 $\alpha = 2 \text{ rad}$

$l = 12 \cdot 2 = 24 \text{ cm}$

$\sigma = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2$

b) $l = 36 \text{ m}$
 $\alpha = 4 \text{ rad}$

$36 = 4r$
 $r = 9 \text{ m}$

$\sigma = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 36 = 162 \text{ m}^2$

c) $r = 5 \text{ km}$
 $\alpha = 100^\circ$

$l = \frac{100}{360} \cdot 2\pi \cdot 5$
 $\cong 8,727 \text{ km}$

$\sigma = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot 25$
 $\cong 21,817 \text{ km}^2$

d) $r = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
 $l = 25'000 \text{ km}$
 $r = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$
 $l = 25 \cdot 10^3 \text{ km}$

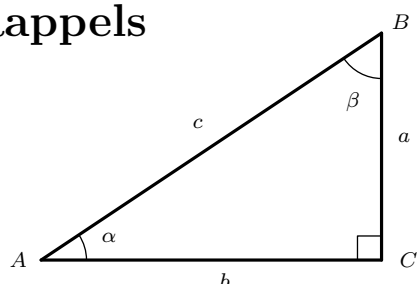
$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{25}{6,37}$
 $\cong 3,9246 \text{ rad}$
 $\cong 224,9^\circ$

$\sigma = \frac{1}{2} r \cdot l$
 $= \frac{1}{2} \cdot 6,37 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^3$
 $= 79'625'000 \text{ km}^2$
 $= 7,9625 \cdot 10^7 \text{ km}^2$

ex 1.5
1.15

1.2 Trigonométrie du triangle rectangle

Rappels



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{Aire} = \sigma = \frac{1}{2}ab$$

a et b sont les **cathètes** du triangle ABC .

c est l'**hypoténuse** du triangle ABC .

α et β sont **complémentaires** si $\alpha + \beta = 90^\circ$.

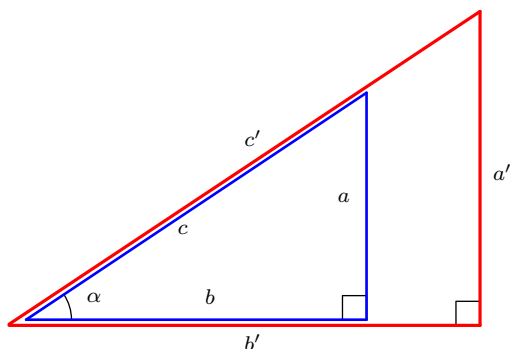
α et β sont **supplémentaires** si $\alpha + \beta = 180^\circ$.

a est le côté **opposé** à α .

b est le côté **adjacent** à α .

α est **aigu** si $0 < \alpha < 90^\circ$.

α est **obtus** si $\alpha > 90^\circ$.



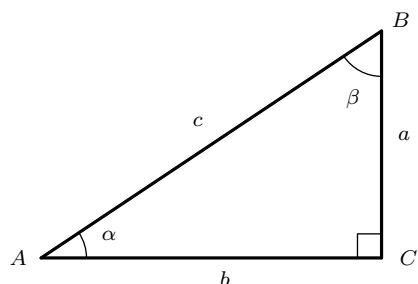
Deux triangles ayant les mêmes angles sont dits **semblables**.

Le théorème de **Thalès** nous dit que :

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

De plus, ces rapports ne dépendent que de la mesure de l'angle α .

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle



$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \left(= \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \right)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \left(= \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad \left(= \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \right)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad \left(= \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \right)$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad \left(= \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \right)$$

$$\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \left(\frac{\text{opp}}{\text{adj}} \right)$$

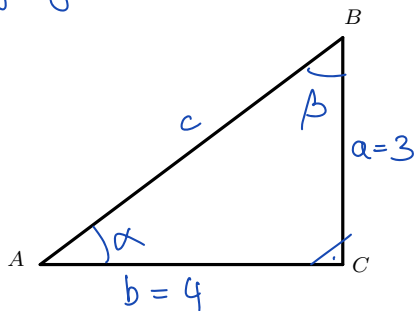
Exemples :

1° Dans le triangle ABC rectangle en C , on donne $a = 3$ cm et $b = 4$ cm.

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \underline{5 \text{ cm}}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \underline{6 \text{ cm}^2}$$

Pythagore



$$\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$$

$$\cos(\beta) = \frac{3}{5}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$

$$\sin(\beta) = \frac{4}{5}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$$

$$\tan(\beta) = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx \underline{36,9^\circ}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx \underline{53,1^\circ}$$

ou $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

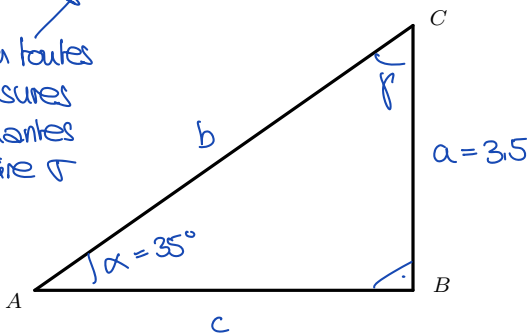
ou $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

ou $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

ou $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

2° Résoudre le triangle ABC rectangle en B . On donne $BC = 3,5$ cm et $\alpha = 35^\circ$:

Calculer toutes les mesures manquantes et l'aire σ



$$\bullet \gamma = 90^\circ - 35^\circ = \underline{55^\circ}$$

$$\bullet \tan(35^\circ) = \frac{3,5}{c} \quad | \cdot c$$

$$c \cdot \tan(35^\circ) = 3,5 \quad | \div \tan(35^\circ)$$

$$c = \frac{3,5}{\tan(35^\circ)} \approx \underline{5,0 \text{ cm}}$$

$$\bullet \sin(35^\circ) = \frac{3,5}{b} \Leftrightarrow b = \frac{3,5}{\sin(35^\circ)} \approx \underline{6,1 \text{ cm}}$$

ou Pythagore : $b \approx \sqrt{3,5^2 + 5,0^2} \approx 6,1 \text{ cm}$

$$\bullet \sigma \approx \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 5,0 \approx \underline{8,75 \text{ cm}^2}$$