Probabilités

1. Un peu de vocabulaire

Définitions

1. Une **expérience** est dite **aléatoire** si
   — son résultat est imprévisible
   — on connaît avant l'expérience tous les résultats possibles (on peut donc les énumérer, les dénombrer)

2. On appelle **issue** le résultat d'une expérience aléatoire.

3. L'ensemble de toutes les issues d'une expérience se nomme **l'univers de l'expérience aléatoire**. On le note U.

4. Un **évènement** est un sous-ensemble de l'univers. Il contient les **issues favorables** (qui réalisent l'évènement) d'une expérience aléatoire. On le note par une lettre majuscule.

Exemple 1

Lancer un dé est une expérience aléatoire. Lorsqu'il s'immobilise il indique une issue.

L'univers de cette expérience est $U = \{\underbrace{1;2;3;4;5;6}_{\text{issues possibles}}\}$

Obtenir un nombre pair est un évènement : $E = \{\underbrace{2;4;6}_{\text{issues favorables}}\}$

5. Un **évènement** peut-être :
   — **impossible** : s'il ne compte aucune issue, $E = \varnothing$.
   — **simple** ou **élémentaire**, s'il ne contient qu'une issue favorable.
   — **composé**, s'il contient plusieurs issues favorables.
   — **certain**, si toutes les issues sont favorables, $E = U$.

(ex 4.1.1
4.1.2)

2. Approche intuitive de la notion de probabilité

Reprenons cette expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé non pipé, chaque face aura une probabilité égale de sortir (1 chance sur 6). On peut donc dire que la probabilité d'une face est de $\frac{1}{6}$.

Dans cette même expérience, la probabilité d'obtenir un nombre pair est de $\frac{1}{2}$ car il y a 3 issues favorables parmi les 6 issues possibles.

Plus généralement :

Pour calculer la probabilité qu'un évènement E se réalise lors d'une expérience aléatoire, on calcule :

$$P(E) = \frac{\text{nombres d'issues favorables}}{\text{nombres d'issues possibles}}$$

si toutes les issues sont **équiprobables**, c'est à dire ont toutes la même probabilité de se réaliser.

signifie le "nbre d'éléments de"

en fait $P(E) = \frac{\text{nombres d'éléments de } E}{\text{nombres d'éléments de } U} = \frac{\text{card(E)}}{\text{card(U)}} = \frac{\sharp(E)}{\sharp(U)}$

Propriétés :

1. une probabilité est comprise entre 0 et 1 : $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$.
2. 0 indique que l'issue est impossible et 1 qu'elle est certaine.
3. Une probabilité est notée sous forme d'un nombre, d'une fraction ou d'un pourcentage.

Exemple 2

On lance simultanément deux dés de couleurs différentes et on considère les évènements suivants : $U = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots (2,1), (2,2), \dots (6,5), (6,6)\}$ $\#U = 36$ = nbre d'issues possibles

A : "obtenir une somme de 15" $A = \emptyset$ $\#A = 0$ c'est un évènement impossible

B : "obtenir une somme de 12" $B = \{(6,6)\}$ $\#B = 1$

C : "obtenir une somme de 8" $C = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$ $\#C = 5$

D : "obtenir une somme supérieur à 1" $D = U$ $\#D = 36$ c'est l'évènement certain

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{0}{36} = 0$

$P(B) = \frac{1}{36}$

$P(C) = \frac{5}{36}$

$P(D) = \frac{36}{36} = 1$

Exemple 3

On dispose de 26 jetons, gravés avec les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois jetons.

issues possibles : $A_3^{26} = 15'600$

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot de 3 consonnes ? # issues favorables A_3^{20}

$$\Rightarrow \frac{A_3^{20}}{A_3^{26}} = \frac{6840}{15600} \cong 0{,}4385 \cong 43{,}85\,\%$$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot BAC   # issue fav. : $\overset{B}{1} \cdot \overset{A}{1} \cdot \overset{C}{1} = 1$

$$\frac{1}{A_3^{26}} = \frac{1}{15'600} \cong 0{,}000064 \cong 0{,}0064\,\%$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot BAC ou l'une de ses anagrammes

$$\frac{P_3}{A_3^{26}} = \frac{6}{15'600} \cong 0{,}000385 \cong 0{,}0385\,\%$$

Exemple 4

On tire 4 cartes dans un jeu de 36 cartes.   # issues possibles : $C_4^{36} = 58'905$

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 piques ? # issues favorables : C_4^{9}

$$\Rightarrow \frac{C_4^9}{C_4^{36}} = \frac{126}{58'905} \cong 0{,}0021 \cong 0{,}21\,\%$$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique ? # issues favorables : $C_1^1 \cdot C_3^{35}$

$$\Rightarrow \frac{C_1^1 \cdot C_3^{35}}{C_4^{36}} = \frac{6545}{58'905} = 0{,}\bar{1} = 11{,}\bar{1}\,\%$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 pique ?   tout - aucun

$$\frac{C_4^{36} - C_4^{27}}{C_4^{36}} = 1 - \frac{C_4^{27}}{C_4^{36}} = 1 - \frac{17550}{58'905} \cong 0{,}702 \cong 70{,}2\,\%$$

d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 piques ?   tout - aucun - 1pique.

$$\underbrace{1 - \frac{C_4^{27}}{C_4^{36}}}_{\cong 0{,}702\,(c)} - \underbrace{\frac{C_1^9 \cdot C_3^{27}}{C_4^{36}}}_{\cong 0{,}447} \cong 0{,}255 \cong 25{,}5\,\%$$

(ou   2piques   ou   3piques   ou   4piques   (plus long)

$$\frac{C_2^9 \cdot C_2^{27}}{C_4^{36}} + \frac{C_3^9 \cdot C_1^{27}}{C_4^{36}} + \frac{C_4^9}{C_4^{36}} \cong 25{,}5\,\%\ )$$

ex 4.2.1
→ 4.2.8
sauf 7
Δ 4.2.3 et 6
sans success.

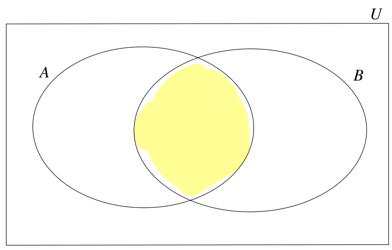
3. Approche mathématique de la notion de probabilité

Par analogie avec le langage ensembliste, on a les définitions et notations suivantes :

Définitions

Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et A et B deux événements.

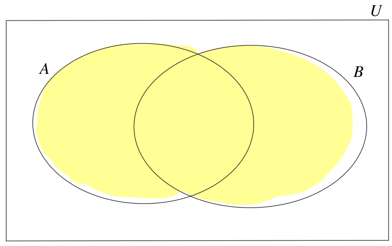
1. l'événement "A **et** B", noté $A \cap B$, se réalise lorsque A et B se réalisent en même temps.



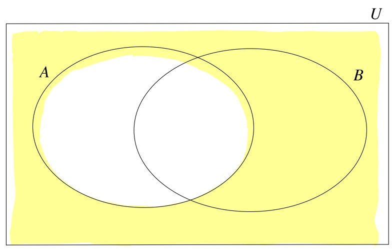
2. l'événement "A **ou** B", noté $A \cup B$, se réalise lorsque au moins un des deux événements A ou B se réalise.

ou inclusif :
A ou B ou les deux

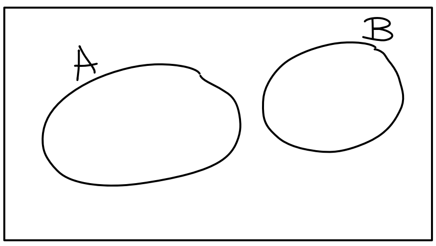
($\neq$ ou exclusif : soit A soit B)



3. l'événement "**non** A", noté $\overline{A}$, est l'événement complémentaire de A et se réalise lorsque A ne se réalise pas.



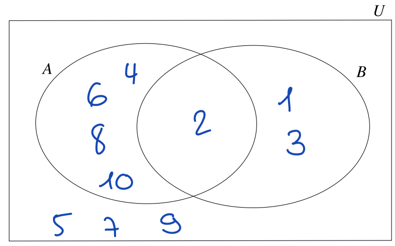
4. Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Dans ce cas, $A \cap B = \varnothing$

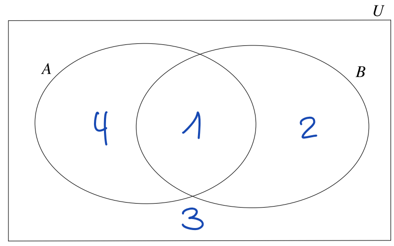


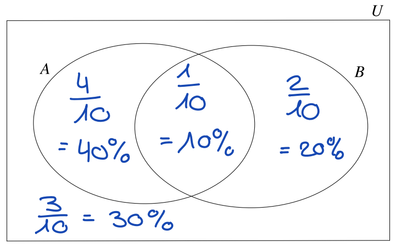
Exemple 5

On choisit un nombre entre 1 et 10 au hasard et on considère les évènements suivants :
A : "obtenir un nombre pair" et B : "obtenir un nombre inférieur à 4"
Représenter cette situation en notant :

- tous les éléments dans le premier diagramme de Venn ci-dessous ;
- le nombre d'éléments de chaque plage dans le deuxième ;
- les probabilités de chaque plage dans le troisième.







$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{3}{10}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$

$P(\overline{A}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $P(\overline{B}) = \frac{7}{10}$

$P(\overline{A \cap B}) = \frac{9}{10}$ $P(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{10}$

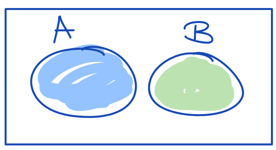
$P(U) = 1$ $P(\varnothing) = 0$

Axiomes de probabilité

$P : U \to [0;1]$
$A \mapsto P(A)$

Soit U l'univers d'une expérience aléatoire.
A chaque événement A, une probabilité associe un nombre réel $P(A)$ satisfaisant les axiomes suivants :

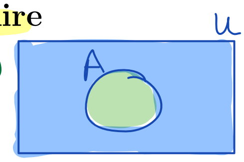
- $P(A) \geq 0$
- $P(U) = 1$
- Si A et B sont **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$)
  alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Propriétés d'une probabilité

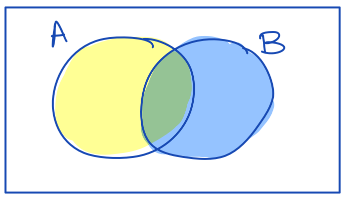
1. **Valeur de la probabilité d'un événement**
   $0 \leq P(A) \leq 1$

2. **Probabilité de l'événement contraire**
   $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ $\iff P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



$\iff$ $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
"tout - contraire"

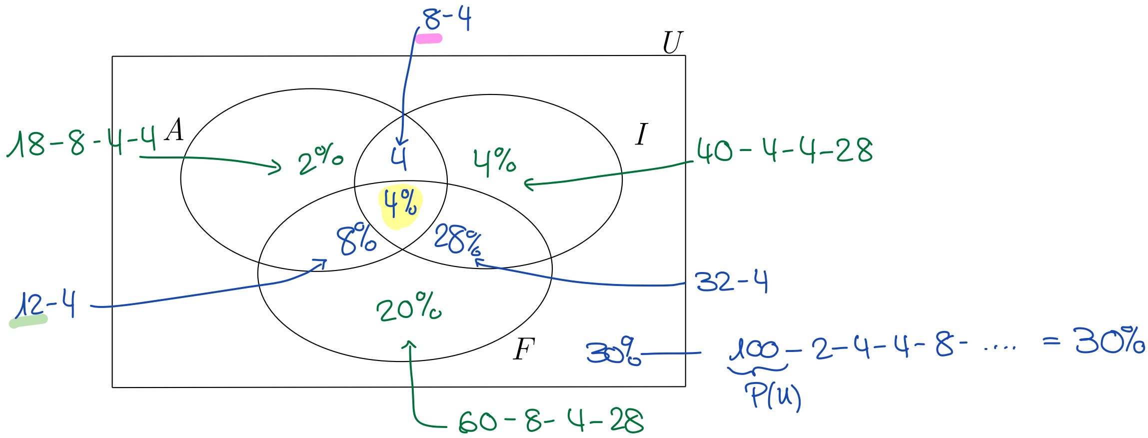
3. **Probabilité d'une union de deux événements** (ou d'une réunion d'événements)
   Pour deux événements A et B quelconques
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Si on calcule $P(A)+P(B)$
on compte à double $P(A \cap B)$.
C'est pourquoi on doit le soustraire une fois.
(si év. pas incompatibles
sinon $A \cap B = \emptyset$)

Exemple 6

Dans le camping, 60% des vacanciers comprennent au moins le français, 40% au moins l'italien, 18% au moins l'anglais, 32% au moins le français et l'italien, 12% au moins le français et l'anglais, 8% au moins l'italien et l'anglais et 4% comprennent les trois langues.



Compléter le diagramme de Venn de la situation et la probabilité qu'un vacancier comprenne...

a) l'anglais 18%

b) l'anglais uniquement 2%

c) exactement 2 de ces 3 langues
$4+8+28 = 40\%$

d) au moins 2 des 3 langues
$40 + 4 = 44\%$

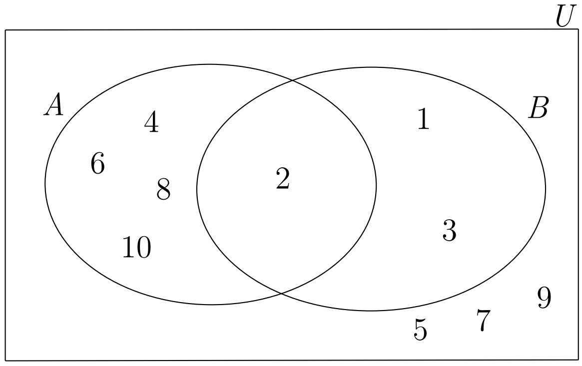
e) aucune de ces 3 langues 30%

(ex 4.2.10 ou exple)
ex 4.2.9 / 14 → 16

4. Probabilité conditionnelle

Il arrive que la probabilité d'un événement change si l'on connaît une information supplémentaire.
Par exemple, si l'on choisit un élève au hasard dans le gymnase, la probabilité qu'il suive l'OC "Application des maths" est d'environ 2%. Si on sait que cet élève est en 3M la probabilité qu'il suive cette OC devient plus grande (environ 11%).

Reprenons l'exemple dans lequel on choisissait un nombre entre 1 et 10 au hasard, avec A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre inférieur à 4 ».



La probabilité d'obtenir un nombre pair est $P(A) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

Par contre, la probabilité d'obtenir un nombre pair sachant qu'on a obtenu un nombre inférieur à 4 est $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$ car on a restreint l'univers à B.

Définition :
Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire, la probabilité que A **se réalise sachant que** B **s'est réalisé** se note $P(A|B)$ et se calcule comme suit

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{avec } P(B) \neq 0}$$

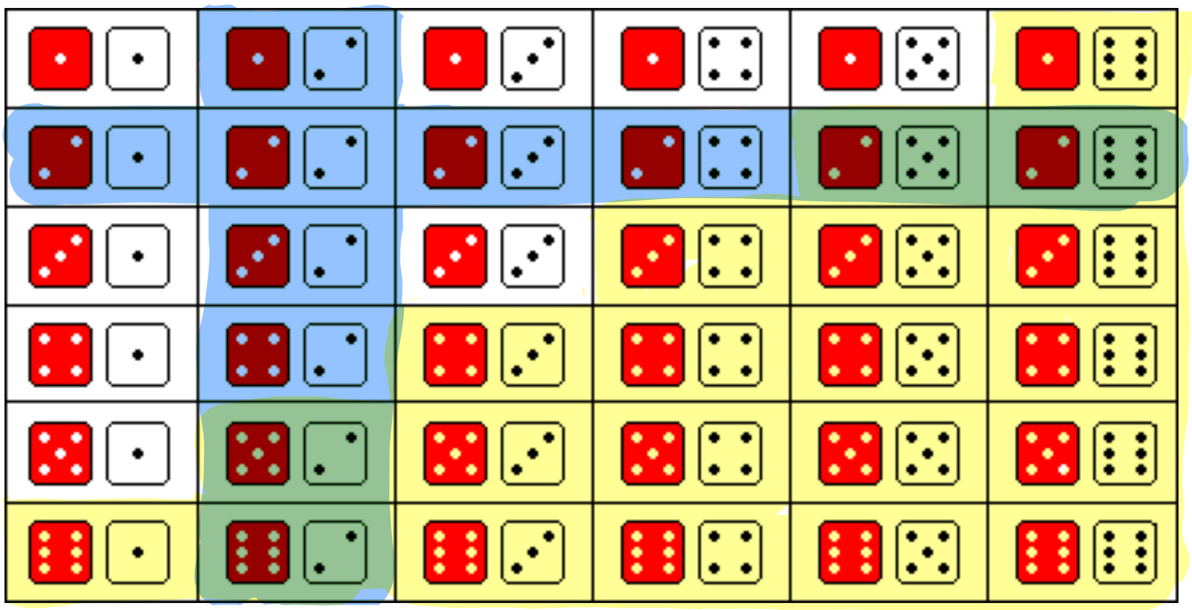
Calculer $P(B|A)$ pour l'exemple ci-dessus.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5}$$

probabilité d'obtenir un nbre inférieur à 4 sachant qu'il est pair.

Exemple 7

On lance simultanément deux dés de couleurs différentes. $\# U = 36$



Quelle est la probabilité des évènements suivants ?

A : "la somme est supérieure à 6" $\# A = 21$

B : "un des deux dés indique un 2". $\# B = 11$

C : "obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2".

D : "un des deux dés indique un 2, sachant que la somme est supérieure à 6"

$$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(C) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1/9}{11/36} = \frac{1}{9} \cdot \frac{36}{11} = \frac{4}{11}$$

$$\overset{\text{dessin}}{=} \frac{4}{11}$$

$$P(D) = P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1/9}{7/12} = \frac{1}{9} \cdot \frac{12}{7} = \frac{4}{21}$$

$$\overset{\text{dessin}}{=} \frac{4}{21}$$

ex 4.3.1/2/7/8/9

Théorème de multiplication

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Preuve : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad | \cdot P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(B) \cdot P(A|B) = P(A \cap B)$

De même pour l'autre égalité. #

Ce théorème facilite le calcul de probabilité, notamment dans le cas où les information de la consigne sont des probabilités conditionnelles ou que l'expérience est composée de plusieurs épreuves successives. $\underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots}_{\text{cf arbre}}$

Exemple 8

On a les informations suivantes :

- 60% des élèves ont fait leurs devoirs. ou $\frac{3}{5}$
- $\dfrac{2}{3}$ des élèves qui ont fait leurs devoirs ont réussi le test surprise.
- $\dfrac{3}{4}$ des élèves qui n'ont pas fait leurs devoirs n'ont pas réussi le test surprise.

On considère les évènements suivants : D :"L'élève a fait ses devoirs. " et R : " L'élève a réussi le test surprise. "

a) Coder ces informations de manière ensembliste.

- $P(D) = 60\% = \frac{3}{5}$
- $P(R|D) = \frac{2}{3}$
- $P(\overline{R}|\overline{D}) = \frac{3}{4}$

b) Calculer la probabilité que si l'on choisisse un élève au hasard,

1) il n'a pas fait ses devoirs.

$P(\overline{D}) = 100\% - 60\% = 40\%$ ou $P(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

2) il a fait ses devoirs et réussi le test surprise.

$P(D \cap R) = P(D) \cdot P(R|D) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

3) il n'a ni fait ses devoirs, ni réussi le test surprise.

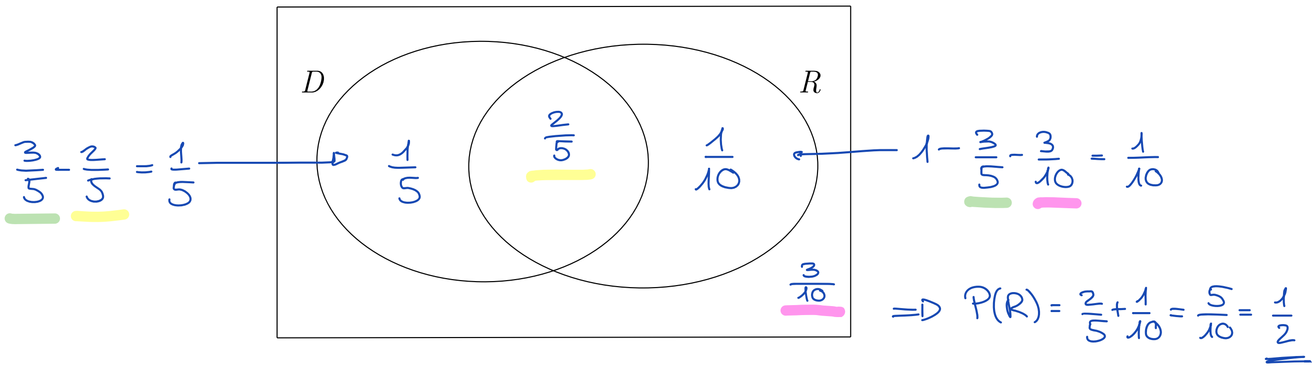
$P(\overline{D} \cap \overline{R}) = P(\overline{D}) \cdot P(\overline{R}|\overline{D}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

4) il a réussi le test surprise.

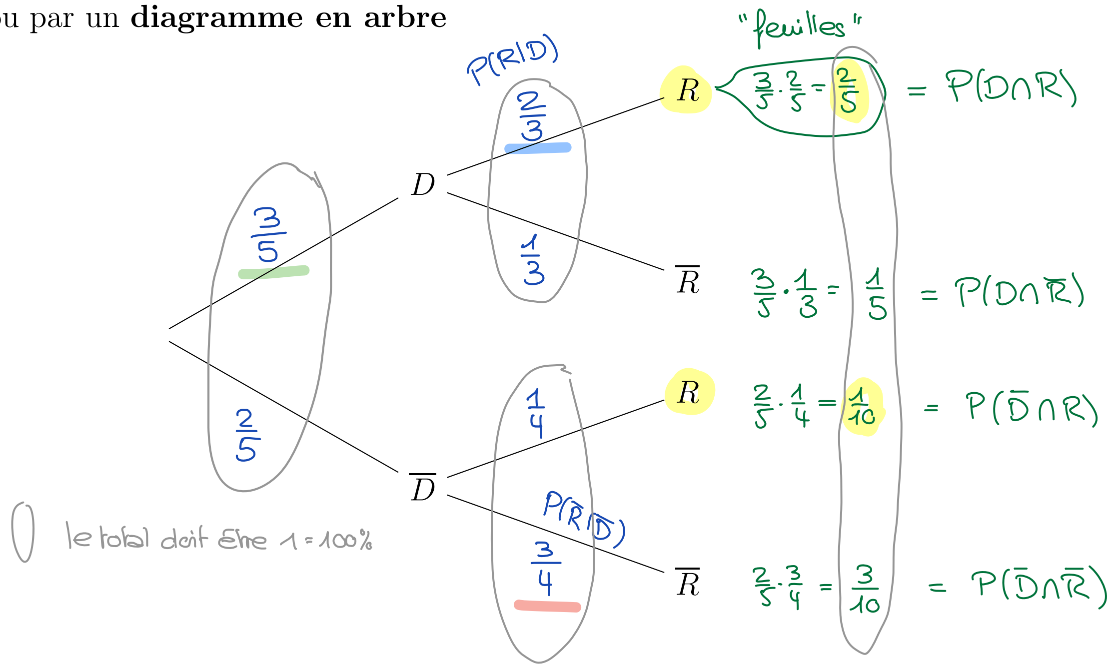
$P(R) = ?$

On va s'aider d'un diagramme

On peut représenter cette situation par un diagramme de Venn.



ou par un **diagramme en arbre**



On représente toutes les issues possibles par des "chemins" définis comme une succession de "branches". Au-dessus des premières "branches", on note la probabilité de ces "branches". Au-dessus des suivantes, ce sont des probabilités conditionnelles.
Au bout de chaque "chemin", on note la probabilité de la "feuille".

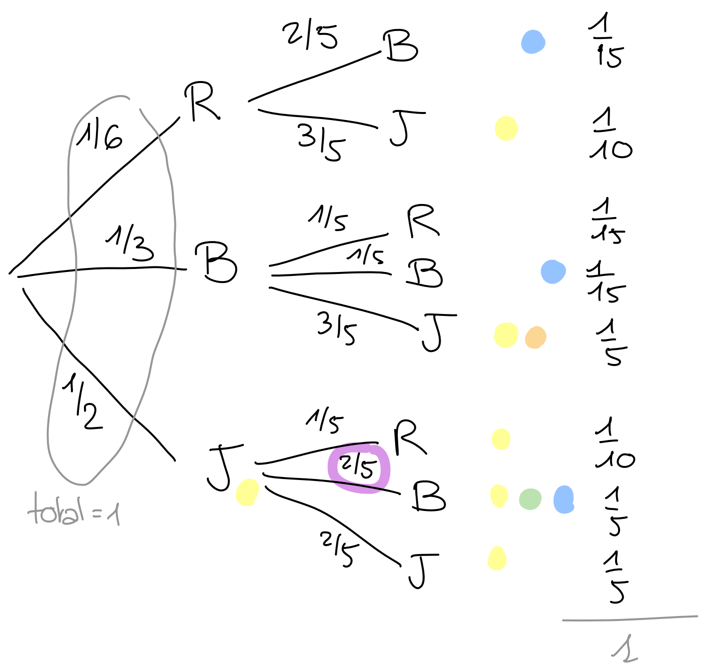
Par le théorème de multiplication on obtient que la probabilité d'une "feuille" est égale au produit des probabilités des "branches" qui forment ce "chemin". Cette probabilité correspond à la probabilité de l'intersection des évènements du "chemin".

Dans un arbre deux "chemins" sont toujours incompatibles. Pour calculer la probabilité d'un événement qui est la réunion de plusieurs "chemins", on additionne les probabilités de leur "feuille" (cf. axiomes de probabilité). $(P(A \cup B) = P(A) + P(B))$

$$\Rightarrow P(R) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

Exemple 9

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules bleues et 3 boules jaunes. On tire 2 boules successivement.
Représenter cette situation par un diagramme en arbre.



Calculer la probabilité de l'événement

a) "Tirer une boule bleue puis une boule jaune".

$$P(1^e B \cap 2^e J) = \frac{1}{5}$$

b) "Tirer au moins une boule jaune". $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

c) "Tirer une boule bleue si la première est une boule jaune".

$P(2^e B \mid 1^e J) = \frac{2}{5}$ (directement ds l'arbre)

ou avec déf : $\frac{P(1^e J \cap 2^e B)}{P(1^e J)} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{5}$

d) "La première était une boule jaune si la deuxième est bleue".

$$P(1^e J \mid 2^e B) = \frac{P(1^e J \cap 2^e B)}{P(2^e B)} = \frac{1/5}{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}} = \frac{1/5}{\underbrace{5/15}_{1/3}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{1} = \frac{3}{5}$$

ex 4.3.11/12/14/15/17/18

Exemple 10
Supposons qu'il existe un test rapide permettant de diagnostiquer un certain virus et qu'on observe que :

$$P(T|V) = 95\% = P(\overline{T}|\overline{V})$$

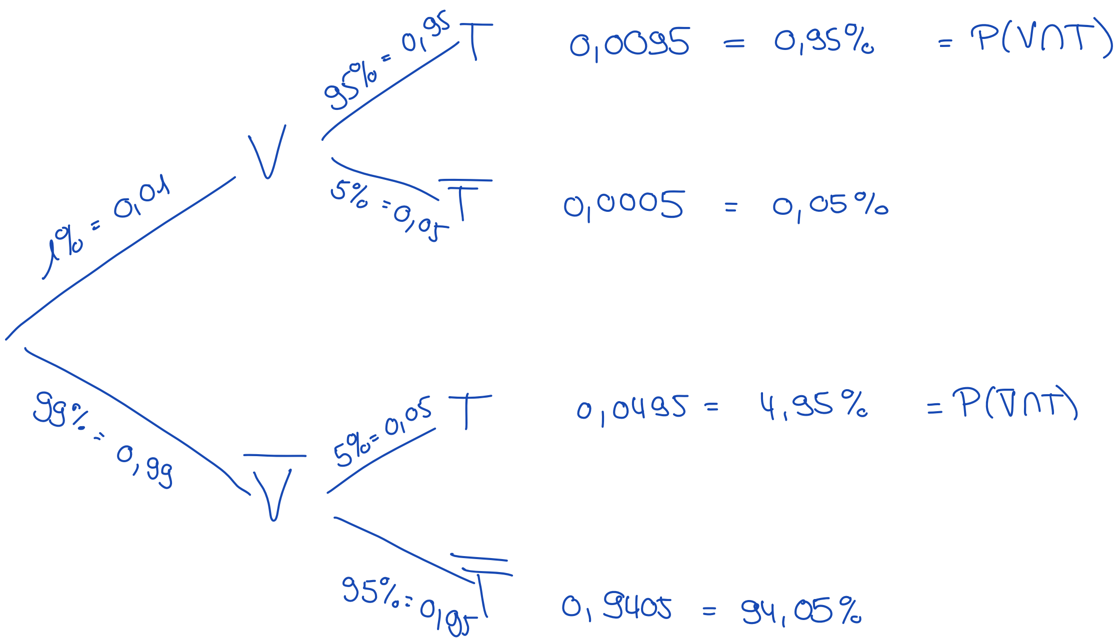
où T : "La personne réagit positivement au test." et V : "La personne a le virus. "
On observe, de plus, que 1% des personnes testées avaient vraiment le virus.

a) Traduire "en français" ce que signifient $P(T|V)$ et $P(\overline{T}|\overline{V})$

Prob que la pers a réagi pos. au test sachant qu'elle a le virus

Prob. " " nég " " " " n'a pas "

b) Représenter cette situation par un diagramme en arbre.



c) Calculer $P(V|T)$ et $P(\overline{V}|T)$

$\underset{\text{ont le virus sachant +}}{P(V|T)} = \frac{P(V\cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}95\%}{0{,}95\% + 4{,}95\%} = \frac{0{,}95}{5{,}9} \cong 16{,}1\%$

$\underset{\text{pas malade sachant +}}{P(\overline{V}|T)} = \frac{P(\overline{V}\cap T)}{P(T)} = \frac{4{,}95\%}{5{,}9\%} = \frac{4{,}95}{5{,}9} \cong 83{,}9\%$

d) Que penser de la valeur de ce test ?

Il est peu fiable avec peu de personnes malades.

(Si 50% des pers testée ont vrmt le virus on obtient $P(V|T) \cong 95\%$ et $P(\overline{V}|T) \cong 5\%$

5. Évènements indépendants

Définition :

On dit que A et B sont **indépendants** si le fait de savoir que B s'est réalisé n'influence pas la réalisation de A et réciproquement. Dans ce cas,

$$P(A|B) = P(A) \text{ et réciproquement } P(B|A) = P(B)$$

Propriété : A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Exemple 11

On tire une carte d'un jeu de 36 cartes. On considère les évènements suivants :

A : "La carte est un as."

C : "La carte est un cœur."

R : "La carte est un roi."

F : "La carte est une figure (valet, dame ou roi)."

Montrer que A et C sont indépendants, mais que R et F sont dépendants.

$$P(A) = \frac{C_1^4}{C_1^{36}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \text{A et C sont indépendants}$$

$$P(R) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(F) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(R \cap F) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \text{R et F sont indépendants}$$

(ex 4.4.1)

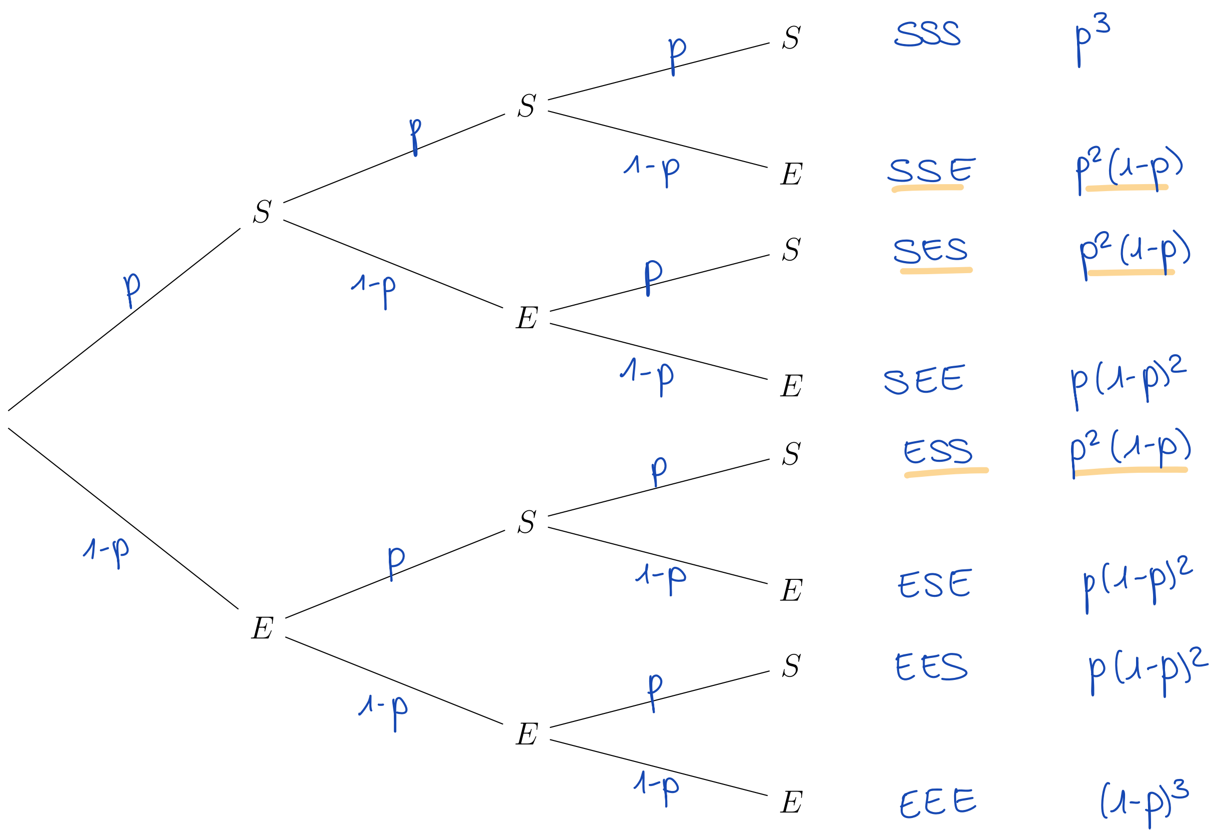
6. Loi binomiale

Considérons une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles, que nous appellerons S :"succès" et E :"échec".

Si la probabilité d'obtenir un "succès" est de p, alors celle d'obtenir un "échec" est de $1-p$, car ces deux événements sont complémentaires.

Si la probabilité p ne change pas en répétant l'épreuve plusieurs fois, on parle d'**épreuves successives indépendantes**.

En effectuant n répétitions d'une telle expérience, on obtient un arbre du type : (ici $n = 3$)



En observant cet arbre, on constate que les "feuilles" sont en quelque sorte des mots de n lettres, composés de k fois la lettre S et de $n-k$ fois la lettre E.
La probabilité d'une telle "feuille" est de $p^k(1-p)^{n-k}$.

Si je cherche la probabilité d'obtenir k succès, peu m'importe l'ordre dans lequel les succès et les échecs se sont passés. Il y a donc C_k^n "feuilles" à additionner.

On trouve donc :

$$\boxed{P(\text{"}k \text{ succès "}) = C_k^n \cdot p^k(1-p)^{n-k}}$$

On l'appelle la **loi binomiale**.

Par exple $(n=3)$ $P(2 \text{ succès}) = 3 \cdot p^2(1-p)$

$\downarrow$

C_2^3 = "nbre de mots de 3 lettres avec 2S" ordre pas important

Exemple 12

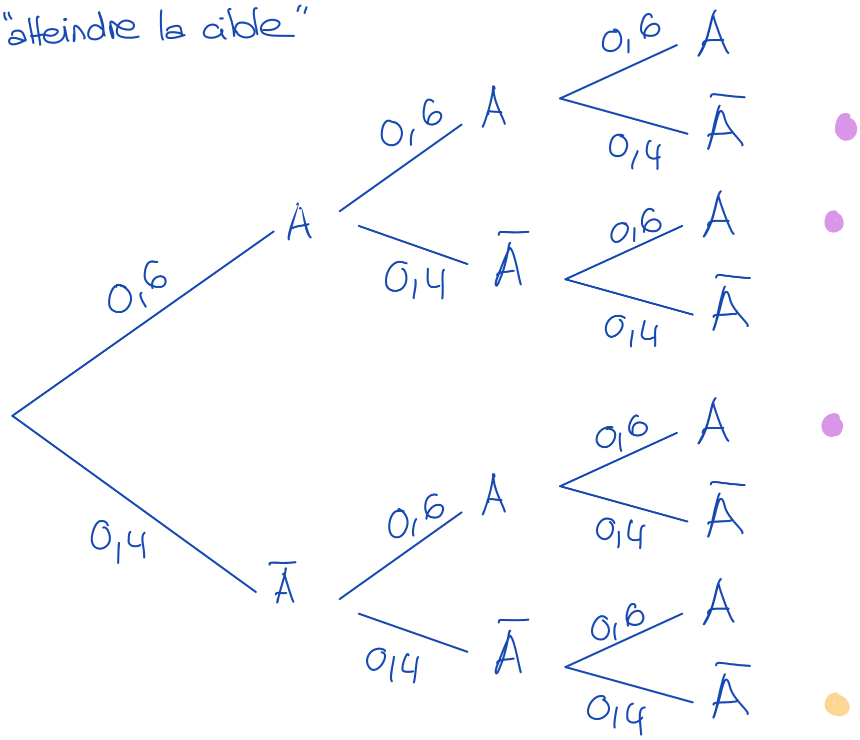
Un tireur à l'arc atteint sa cible avec une probabilité de 60%. Il tire successivement 3 flèches.

a) Quelle est la probabilité qu'il atteigne exactement deux fois la cible ?

b) Quelle est la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible ?

c) Combien de flèches doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible soit supérieure ou égale à 99% ?

A : "atteindre la cible"



a) $P(2A) = C_2^3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}432 = 43{,}2\%$

b) au moins 1 fois $\Leftrightarrow$ tout - aucune fois

$\Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}4^3 = 0{,}936 = 93{,}6\%$

c) $1 - 0{,}4^n = 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}99 = 0{,}4^n$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}01 = 0{,}4^n$

$\Leftrightarrow \quad n = \log_{0{,}4}(0{,}01)$

$= \dfrac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}4)} \cong 5{,}03$

$\Rightarrow$ Il doit tirer au moins 6 flèches.

ex 4.4.4 / 4.4.6