Corrigé - Exercices révision – géométrie

Exercice 3.1

1) $\{D\} = (AD) \cap (CD)$

$(AD) : m = 5 \Rightarrow y = 5x + h$

$A(-1;8) \in (AD) : 8 = 5 \cdot (-1) + h \Leftrightarrow h = 13$

$\Rightarrow (AD) : y = 5x + 13 \Leftrightarrow 5x - y + 13 = 0$

$(CD) : \begin{cases} x = 2 + k \mid 1 \\ y = -1 - k \mid 1 \end{cases}$

$x + y = 1$

$\Rightarrow (CD) : x + y - 1 = 0$

$D : \begin{cases} 5x - y = -13 \mid 1 \\ x + y = 1 \mid 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = -13 \\ 6x = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \cdot (-2) + 13 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow D(-2;3)$

2) * ABCD est un trapèze car

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 - (-1) \\ 0 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

ou $\det(\vec{AB}; \vec{CD}) = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 0$

donc $\vec{AB} \overset{\text{colinéaire}}{\sim} \vec{CD}$

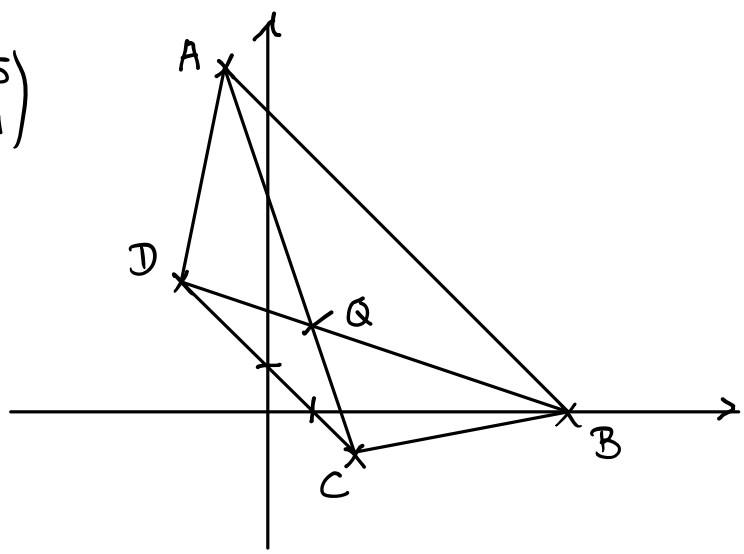
* ABCD est isocèle car

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 - (-1) \\ 3 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{CB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|\vec{AD}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$

$\|\vec{CB}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

donc $\|\vec{AD}\| = \|\vec{CB}\|$



3) $\{Q\} = (AC) \cap (BD)$

(AC) : $\vec{d} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (AC) : 3x + y + c = 0$

$A \in (AC) : 3 \cdot (-1) + 8 + c = 0$

$c = -5$

$\Rightarrow (AC) : 3x + y - 5 = 0$

(BD) : $\vec{d} = \vec{BD} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (BD) : x + 3y + c = 0$

$B \in (BD) : 7 + 3 \cdot 0 + c = 0$

$c = -7$

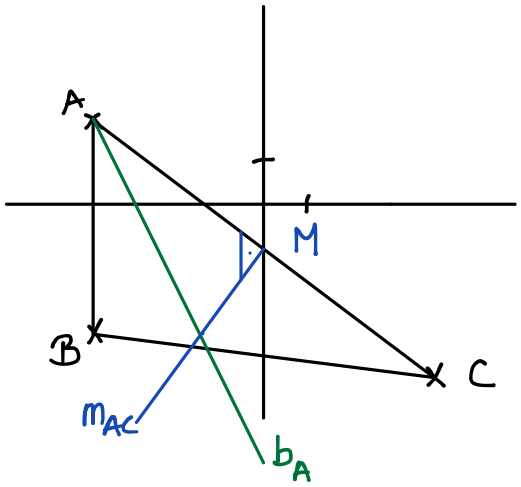
$\Rightarrow (BD) : x + 3y - 7 = 0$

$Q : \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ -8x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \cdot 1 + 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow Q(1;2)$

4) $\vec{BQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \vec{BD}$ et $\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \vec{AC}$

Exercice 3.2

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$



* b_A : commençons par déterminer les équations des droites (AB) et (AC)

(AB) : droite verticale (vu $\vec{AB}$) passant par A $\Rightarrow (AB) : x = -4 \Leftrightarrow x + 4 = 0$

(AC) : $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \overset{\text{colinéaire}}{\sim} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x + 4y + c = 0$

$A(-4;2) \in (AC) \Rightarrow 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + c = 0$

$c = 4$

$\Rightarrow (AC) : 3x + 4y + 4 = 0$

$$b_A : \frac{x+4}{\underbrace{\sqrt{1^2+0^2}}_{1}} = \pm \frac{3x+4y+4}{\underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{5}} \quad \Big| \cdot 5$$

$$5(x+4) = \pm (3x+4y+4)$$

⊕ $5(x+4) = +(3x+4y+4)$

$5x+20 = 3x+4y+4$

$2x-4y+16 = 0$

$x-2y+8 = 0$

$\left(m = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}\right)$

⊖ $5(x+4) = -(3x+4y+4)$

$5x+20 = -3x-4y-4$

$8x+4y+24 = 0$

$2x+y+6 = 0 \quad (b_A)$

$(m = -2)$ c'est la bissectrice intérieure ou la représentation graphique.

* m_{AC} c'est une droite ⊥ à (AC) $\Rightarrow$ $m_{AC} : 4x-3y+c=0$
(car (AC) : $3x+4y+4=0$)

et elle passe par M milieu de AC : $M\left(\frac{-4+4}{2} ; \frac{2-4}{2}\right) = (0;-1)$

$\Rightarrow 4\cdot 0 - 3\cdot(-1) + c = 0$
$c = -3$

$\Rightarrow (m_{AC}) : 4x-3y-3=0$

* $\{P\} = b_A \cap m_{AC}$: $\begin{cases} 2x+y=-6 & \cdot 3 \\ 4x-3y=3 & \cdot 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $+\begin{array}{l} 6x+3y=-18 \\ 4x-3y=3 \end{array}$

$10x = -15$
$x = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2\cdot 1{,}5 + y = -6$
$y = -3$ $\Rightarrow$ $P\left(-\frac{3}{2} ; -3\right)$

Exercice 3.3

a) $\{B\} = (AB) \cap (BC)$

Déterminons d'abord (AB) : $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - 4y + c = 0$

$A(-3;-5) \in (AB) : 3\cdot(-3) - 4\cdot(-5) + c = 0$

$c = -11$

$\Rightarrow$ (AB) : $3x - 4y - 11 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ x + 2y = 17 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow + \begin{array}{l} 3x - 4y = 11 \\ 2x + 4y = 34 \end{array}$

$5x = 45$

$x = 9 \Rightarrow 9 + 2y = 17$

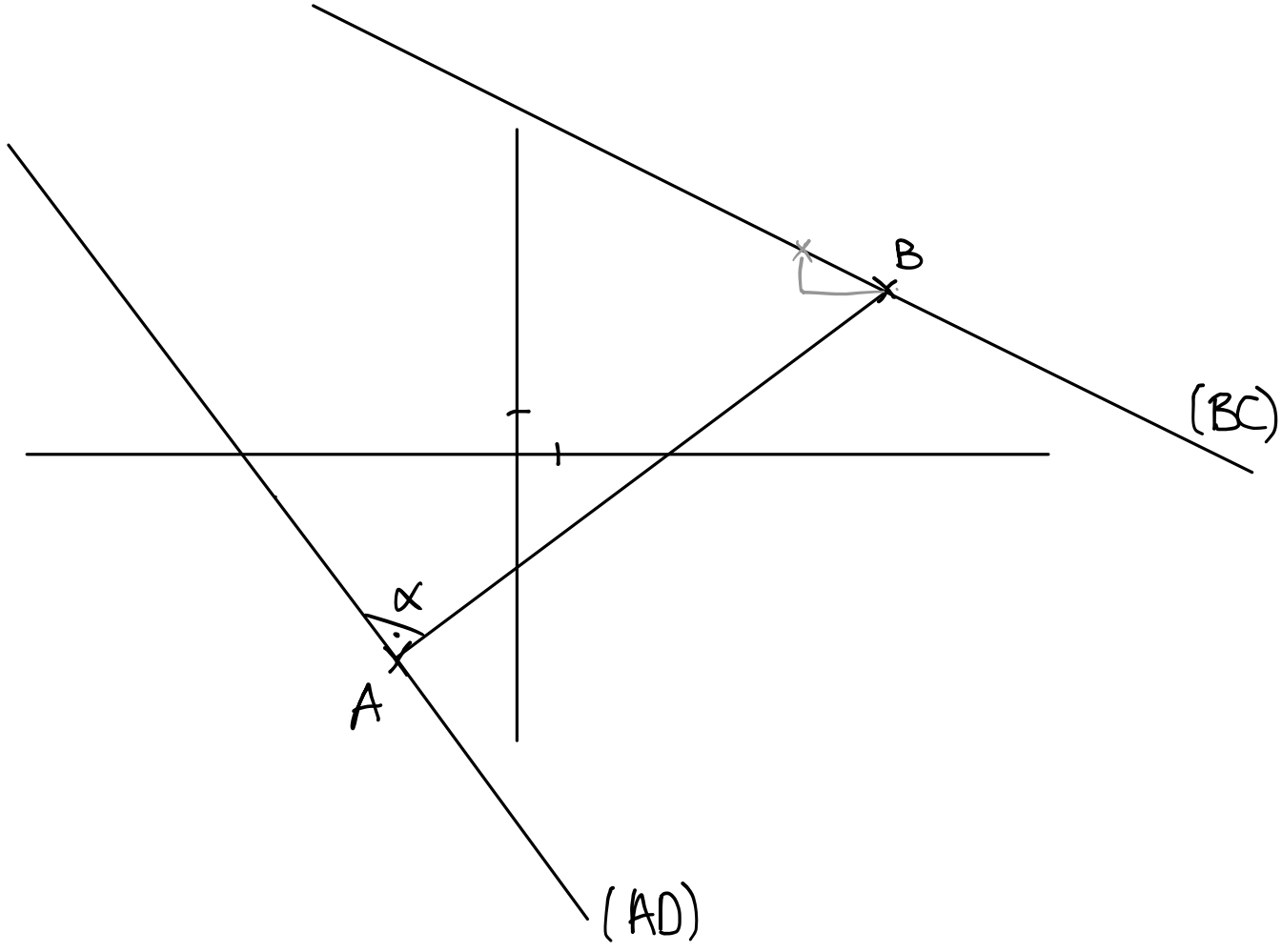
$y = 4$

$\Rightarrow B(9;4)$

* (AD) : $(AD) \perp (AB) \Rightarrow (AD) : 4x + 3y + c = 0$

$A(-3;-5) \in (AD) \Rightarrow 4\cdot(-3) + 3\cdot(-5) + 27 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ (AD) : $4x + 3y + 27 = 0$

b)



c) On sait que AC est la bissectrice de l'angle $\alpha = \sphericalangle BAD$

$$b_A: \quad \frac{3x-4y-11}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \pm \frac{4x+3y+27}{\sqrt{4^2+3^2}} \qquad | \cdot 5$$

$$3x-4y-11 = \pm(4x+3y+27)$$

$$3x-4y-11 = \begin{cases} 4x+3y+27 & \Leftrightarrow \quad x+7y+38=0 \quad \left(m=-\frac{1}{7}\right) \\ -4x-3y-27 & \Leftrightarrow \quad 7x-y+16=0 \quad (m=7) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underline{(AC): \; 7x-y+16=0}$

d) $\{C\} = (AC) \cap (BC)$

$$\begin{cases} 7x-y=-16 & | \cdot 2 \\ x+2y=17 & | \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 14x-2y=-32 \\ +\; x+2y=17 \\ \hline 15x = -15 \\ x = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 7\cdot(-1)-y=-16 \\ 9 = y \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underline{C(-1;9)}$

$\{D\} = (AD) \cap (DC)$

$$(DC): \; (DC) \perp (AD) \Rightarrow (DC): \; 3x-4y+c=0$$
$$C \in (DC) \Rightarrow 3\cdot(-1)-4\cdot 9+c=0, \quad c=39$$
$$\Rightarrow (DC): \; 3x-4y+39=0$$

$$D: \begin{cases} 4x+3y=-27 & | \cdot 4 \\ 3x-4y=-39 & | \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 16x+12y=-108 \\ +\; 9x-12y=-117 \\ \hline 25x = -225 \\ x = -9 \end{array}$$

$$\Rightarrow \; 4\cdot(-9)+3y=-27, \quad y=3 \quad \Rightarrow \quad \underline{D(-9;3)}$$