

Chapitre 1

Programmation linéaire

Rappel

L'équation (réduite) d'une droite est de la forme $y = mx + h$, avec m la pente de la droite et h son ordonnée à l'origine (m et h étant des nombres réels).

Exemple :

$y = -3x + 2$ correspond à l'équation d'une droite dont la pente vaut -3 et l'ordonnée à l'origine vaut 2 .

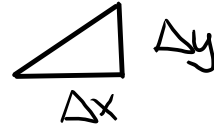
⚠ Lorsque la pente est positive, la droite *monte*; lorsque la pente est négative, la droite *descend*.

De l'équation à la représentation graphique :

Nous pouvons représenter graphiquement une droite donnée par son équation $y = mx + h$.

Il s'agit du graphe de la fonction affine f définie par $f(x) = mx + h$.

On utilise un point à coordonnées entières (soit $(0; h)$ soit en remplaçant x ou y par une valeur entière et en calculant l'autre valeur) et la pente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Exemples :

Représenter graphiquement les droites d'équations suivantes :

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$

fonction: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

pente: $m = \frac{1}{2}$

point à coordonnées entières: $(0; -1)$

b) $y = -3x + 2$

$g(x) = -3x + 2$

$m = -3$

$(0; 2)$

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

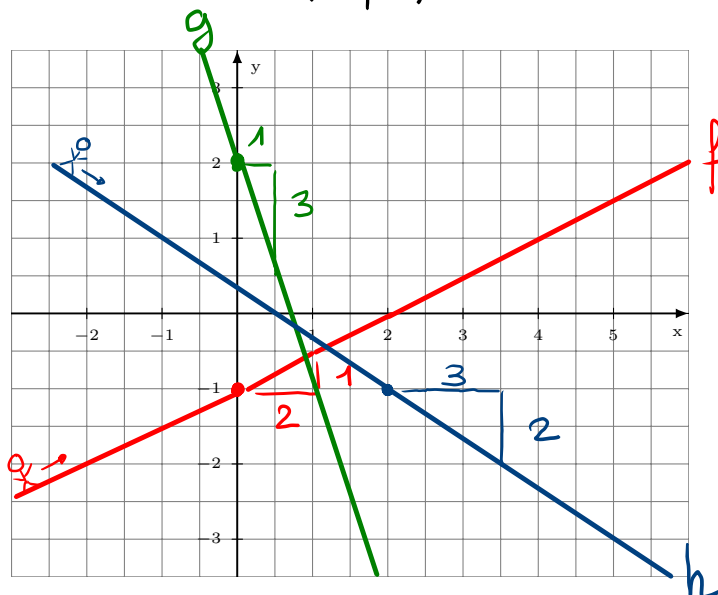
$h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$m = -\frac{2}{3}$

si $x=1$: $y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

si $x=2$: $y = -\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{3} = -1$

$\Rightarrow (2; -1)$



Inéquations linéaires

Définition :

Une **inéquation linéaire** est une inéquation du premier degré à deux inconnues qui peut être écrite sous l'une des formes suivantes (avec a , b et c des nombres réels) :

$$ax + by < c$$

$$ax + by \leq c$$

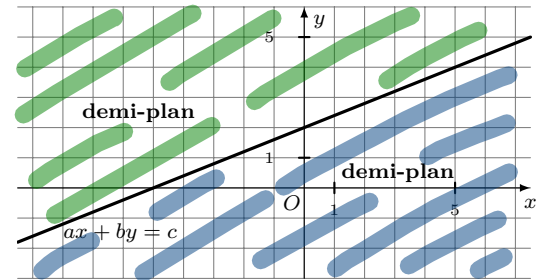
$$ax + by > c$$

$$ax + by \geq c$$

Graphiquement :

L'équation $ax + by = c$ définit une droite qui sépare le plan en 2 **demi-plans** (voir figure ci-contre).

Les **solutions** d'une inéquation linéaire sont **tous les points de l'un de ces demi-plans** vérifiant l'inéquation, la droite frontière étant incluse pour $\leq$ ou $\geq$; et non incluse pour $<$ ou $>$. Il y a une infinité de solutions !



Marche à suivre :

1. Écrire l'équation linéaire $ax + by = c$.
2. Isoler y pour obtenir l'équation de la droite frontière $y = mx + h$ et la représenter.
3. Tester si le point $O(0;0)$ satisfait l'inéquation afin de déterminer si O est dans le demi-plan solution ou non, *si possible. Sinon tester un autre point par exple (1;1) comme dans l'exercice 1.1 b)*
4. Hachurer le demi-plan avec ($\leq$ ou $\geq$) ou sans ($<$ ou $>$) la droite contenant toutes les solutions de l'inéquation.

Exemples :

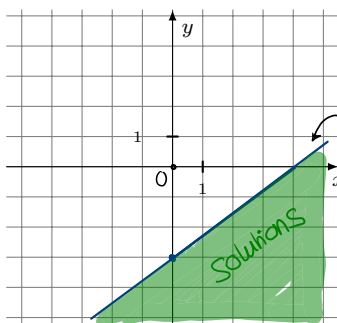
Résoudre graphiquement les 2 inéquations suivantes :

a) $3x - 4y > 12$

1. $3x - 4y = 12$

2. $-4y = -3x + 12$
 $y = \frac{3}{4}x - 3$ $\left(\begin{matrix} (0; -3) \\ m = \frac{3}{4} \end{matrix} \right)$

3. test $(0;0)$: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 > 12$? Non
 $\Rightarrow$ L'origine $O(0;0)$ n'est pas dans le demi-plan solution.



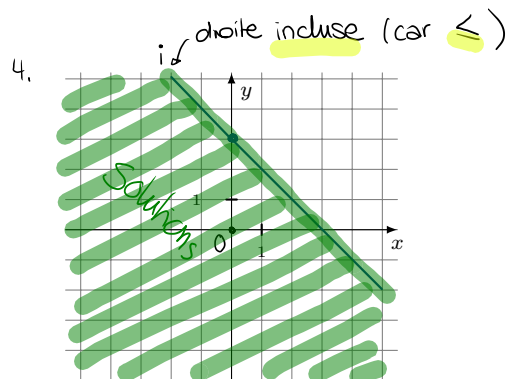
droite non incluse (car $>$)

b) $x + y \leq 3$

1. $x + y = 3$

2. $y = -x + 3$ $m = -1$ et $(0;3)$

3. test $(0;0)$: $0 + 0 = 0 \leq 3$? oui
 $\Rightarrow$ O se trouve dans le demi-plan solution



droite incluse (car $\leq$)

Systèmes d'inéquations linéaires

Comme nous l'avons fait avec les équations, nous travaillons parfois simultanément avec plusieurs inéquations à deux inconnues, c'est-à-dire, avec un **système d'inéquations**. Les solutions d'un système d'inéquations sont les solutions communes à toutes les inéquations du système. Le graphique d'un système d'inéquations correspond à une région R du plan contenant les points correspondants aux solutions. Les exemples suivant illustrent une méthode pour représenter les solutions d'un système d'inéquations.

Exemples :

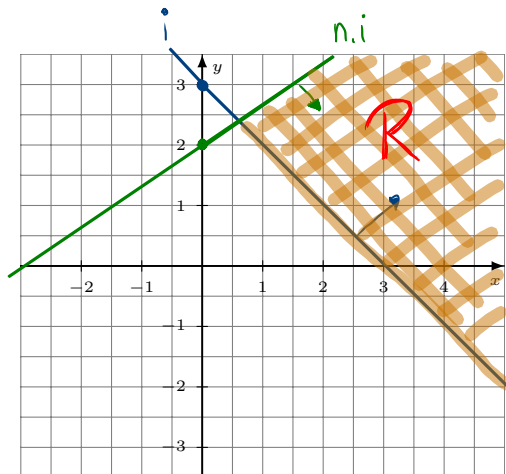
Résoudre graphiquement les 2 systèmes d'inéquations suivants :

a)
$$\begin{cases} x + y \geq 3 & \textcircled{1} \\ -2x + 3y < 6 & \textcircled{2} \end{cases}$$

include
non incluse

① . $x + y = 3$
 $y = -x + 3$ $m = -1$ et $(0, 3)$
 . test $(0; 0)$: $0 + 0 = 0 \geq 3$? non

② . $-2x + 3y = 6$
 $3y = 2x + 6$
 $y = \frac{2}{3}x + 2$ $m = \frac{2}{3}$ et $(0, 2)$
 . test $(0; 0)$: $0 + 0 = 0 < 6$? oui

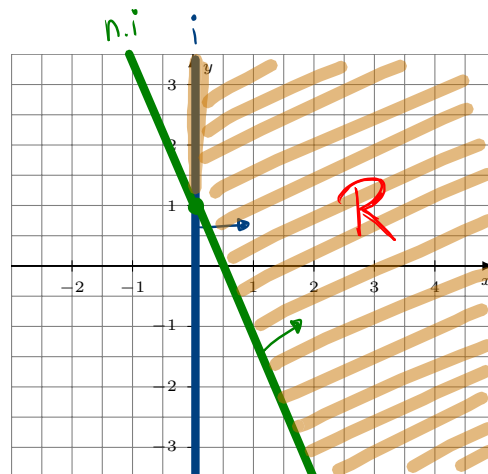


b)
$$\begin{cases} x \geq 0 & \textcircled{1} \\ 2x + y > 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

include
non incluse

① . $x = 0$ c'est l'axe Oy
 . $x \geq 0$ x est positif, ce sont les points à droite de l'axe Oy.

② . $2x + y = 1$
 $y = -2x + 1$
 . test $(0; 0)$: $-2 \cdot 0 + 0 = 0 > 1$? non



ex 1.2 a) b) d) f)