

1.9 René est Charcutier. Il dispose aujourd'hui de 105 kg de lard haché. Avec cette viande, il doit fabriquer des tourtières et des bols de cretons. Pour chaque tourtière qu'il fabrique, il utilise 1 kg de lard haché alors que pour un bol de cretons, il n'a besoin que de 500 g de lard haché. De plus, chaque tourtière lui coûte CHF 0,25 en main-d'oeuvre, alors qu'un bol de cretons lui coûte CHF 0,50 en main d'oeuvre. Il ne peut pas payer plus de CHF 60.- par jour en main-d'oeuvre.

- Pour chacune des tourtières qu'il vend, il réalise un profit de CHF 0,50 et pour chaque bol de cretons qu'il vend, il réalise un profit de CHF 0,75. Combien de tourtières et combien de bols de cretons doit-il fabriquer, s'il veut maximiser son profit ?
- Même exercice mais le profit est de CHF 0,50 sur une tourtière et CHF 1,25 sur un bol de cretons.
- Même exercice mais le profit est de CHF 1.- sur une tourtière et CHF 0,25 sur un bol de cretons.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + 0,5y \leq 105 \\ 0,25x + 0,5y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 210 \quad (1) \\ y = -\frac{1}{2}x + 120 \quad (2) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) fonction objectif:

$$0,5x + 0,75y$$

$$\text{pente : } y = -\frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}x$$

b) fonction objectif:

$$0,5x + 1,25y$$

$$\text{pente : } y = -\frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{5} = -\frac{1}{5}x$$

x : # tourtières

y : # bols de cretons

contraintes:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + 0,5y \leq 105$$

$$0,25x + 0,5y \leq 60$$

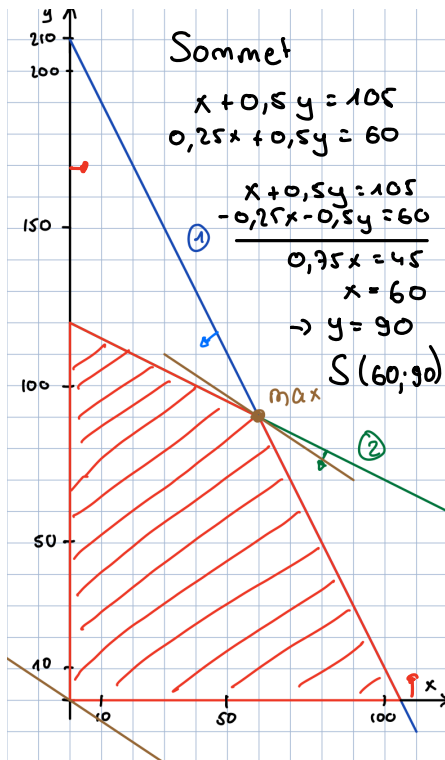
$$\text{test } (0;0): 0+0 \leq 105 \text{ ok}$$

$$\text{test } (0;0): 0+0 \leq 60 \text{ ok}$$

c) fonction objectif:

$$x + 0,25y$$

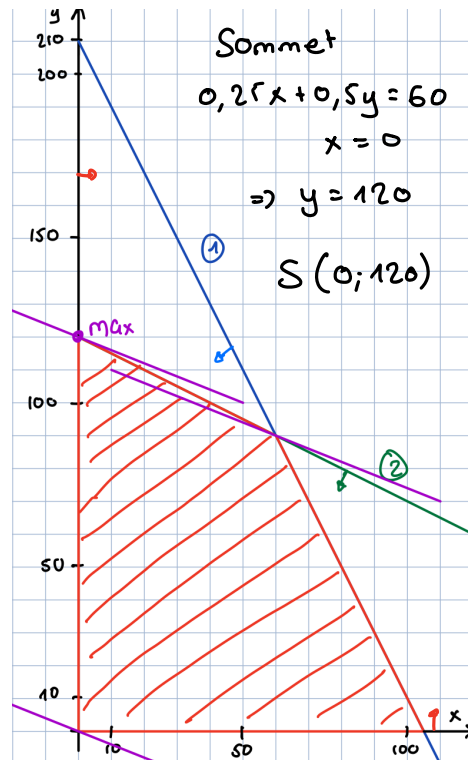
$$\text{pente : } y = -4x$$



il faut 60 tourtières
et 90 cretons

profit max :

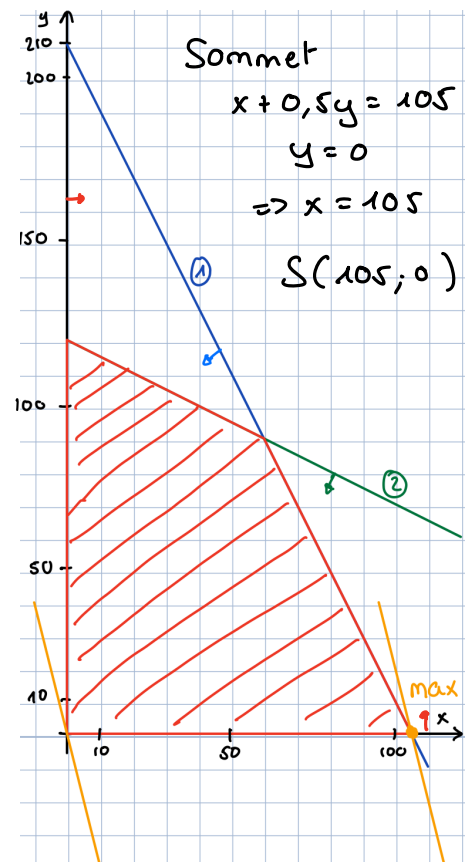
$$0,5 \cdot 60 + 0,75 \cdot 90 = 97,5$$



il faut 0 tourtière
et 120 cretons

profit max :

$$1,25 \cdot 120 = 150$$



il faut 105 tourtières
et 0 cretons

profit max :

$$1 \cdot 105 = 105$$

1.10 Jean est un champion cycliste qui prépare son entraînement en vue d'une importante compétition. Son entraînement doit se composer chaque semaine d'un certain nombre d'heures de travail en salle et d'un certain nombre d'heures de travail sur route. Au total, il doit s'entraîner au moins 20 heures chaque semaine et son nombre d'heures de travail sur route doit être au moins égal au tiers du nombre d'heures de travail en salle. Pour s'entraîner en salle, il retient les services d'un entraîneur spécialisé qui lui coûte CHF 10.- l'heure; cependant, cet entraîneur ne sera disponible que s'il est engagé pour au moins 10 heures par semaine. Pour s'entraîner sur route, il retient les services d'un spécialiste qui lui coûte CHF 12.- l'heure; ce spécialiste ne peut être disponible pour plus de 15 heures par semaine.

a) Comment Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible?

b) Et si l'entraîneur en salle coûte CHF 15.- l'heure et celui sur route CHF 12.- l'heure, de quelle façon Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible?

x : nombre d'heures par semaine en salle
 y : nombre d'heures par semaine sur route
 Contraintes

$$x + y \geq 20$$

$$3y \geq x$$

$$x \geq 10$$

$$y \leq 15$$

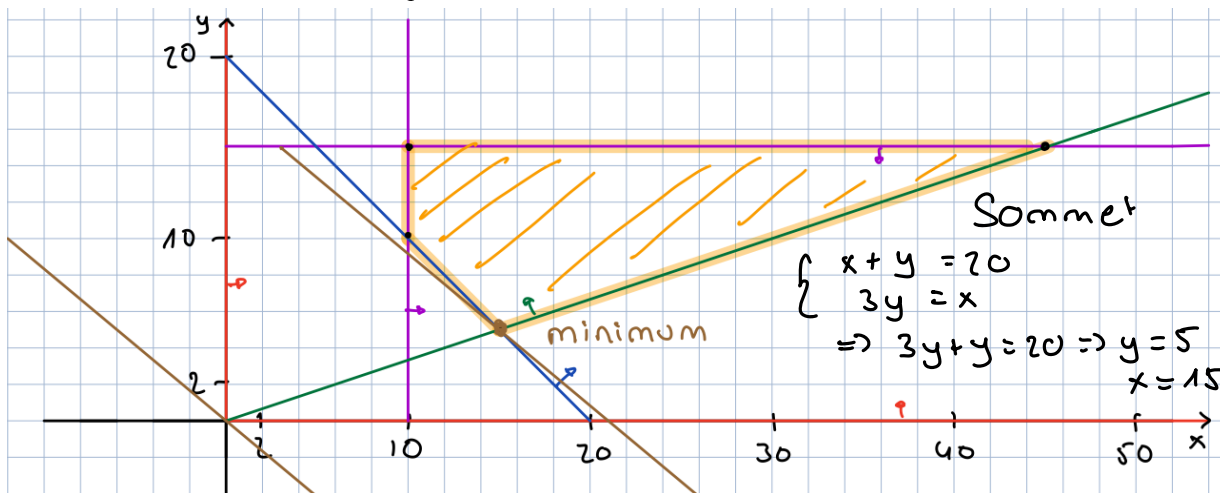
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

a) fonction objectif : $10x + 12y$ à minimiser
 pente : $y = -\frac{10}{12}x = -\frac{5}{6}x$

$$\begin{cases} x + y \geq 20 \\ 3y \geq x \\ x \geq 10 \\ y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 20 \quad ① \\ y = \frac{1}{3}x \quad ② \\ x = 10 \\ y = 15 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

test (0;0) : $0+0 \geq 20$ non
 test (0;0) pas ok : test (1;1) : $3 \geq 1$ ok.



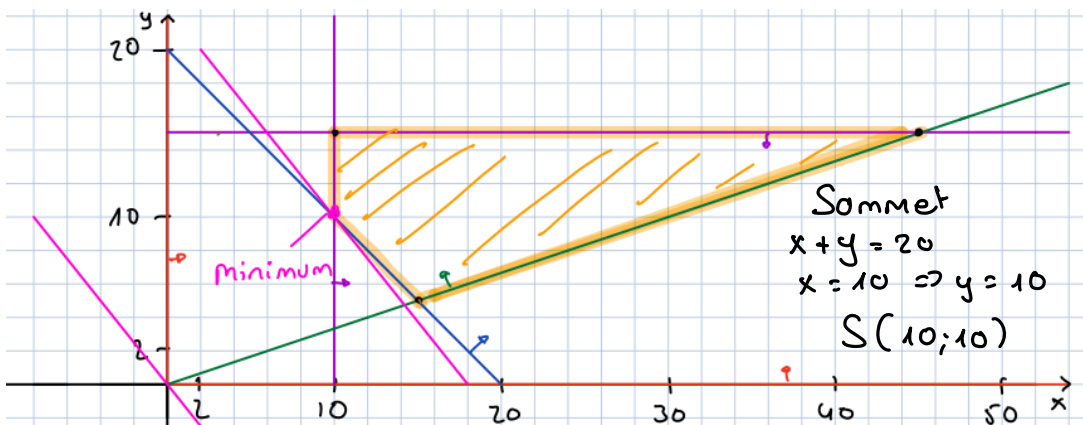
$$S(15;5)$$

→

le minimisent le coût : $15 \cdot 10 + 5 \cdot 12 = 210$

b

$$\text{minimiser } y = -\frac{15}{12}x = -\frac{5}{4}x$$



→ 10 heures en salle
 et 10 heures sur route
 minimisent le coût
 à $15 \cdot 10 + 12 \cdot 10 = 270$

1.11 On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 90 g de protéines, 120 g d'hydrate de carbone et 2'400 calories à partir de deux produits A et B. Une dose du produit A coûte CHF 1.- et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrate de carbone et 300 calories. Une dose du produit B coûte CHF 1.- et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrate de carbone et 400 calories.

Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

	$x = \# \text{doses A}$	$y = \# \text{doses B}$	Min
protéines	15 g.	10 g.	90 g.
hydrate de carbone	20 g.	30 g.	120 g.
calories	300	400	2400
prix	1	1	

contraintes

$$15x + 10y \geq 90$$

$$20x + 30y \geq 120$$

$$300x + 400y \geq 2400$$

$$x \geq 0$$

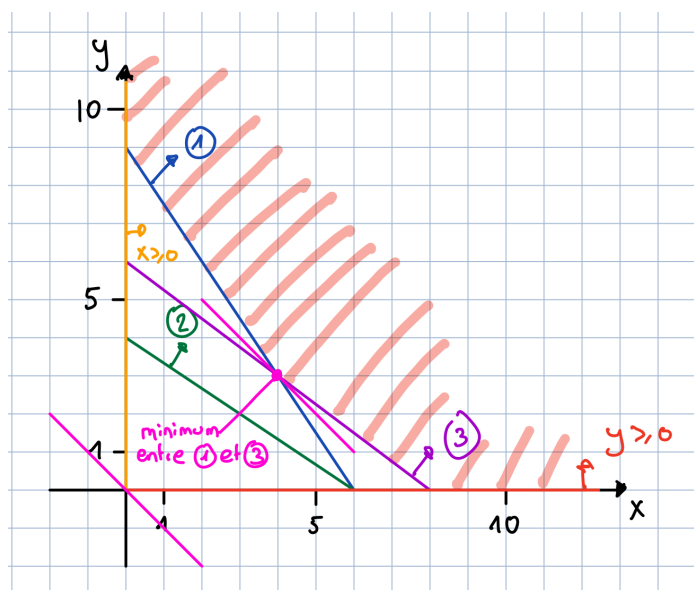
$$y \geq 0$$

fct objectif : $f(x,y) : x \cdot 1 + y \cdot 1 = x + y$ (coût à minimiser)

pente : $y = -x$

test(0;0)

$$\begin{cases} 15x + 10y \geq 90 & \text{non} \\ 20x + 30y \geq 120 & \text{non} \\ 300x + 400y \geq 2400 & \text{non} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 2x + 3y \geq 12 \\ 3x + 4y \geq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -3x + 18 \\ 3y = -2x + 12 \\ 4y = -3x + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 9 & \textcircled{1} \\ y = -\frac{2}{3}x + 4 & \textcircled{2} \\ y = -\frac{3}{4}x + 6 & \textcircled{3} \end{cases}$$



minimum entre 1 et 3 lorsque $x=4$ et $y=3$

En effet si $\textcircled{1} = \textcircled{3}$

$$-\frac{3}{2}x + 9 = -\frac{3}{4}x + 6 \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow -6x + 36 = -3x + 24 \quad | +6x - 24$$

$$\Leftrightarrow 12 = 3x \quad | :3$$

$$4 = x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 9 = -6 + 9 = 3$$

Pour un coût minimum, il faut 4 doses A et 3 doses B.

$\Rightarrow$ Le coût sera de $f(4,3) = 4 + 3 = 7$ francs

1.12 Une société importatrice de café achète des lots de grains de café en vrac, puis les sépare en grains de premier choix, ordinaires et inutilisables. La société a besoin d'au moins 280 t de grains de premier choix et 200 t de grains ordinaires. Elle peut acheter des grains non triés à volonté chez deux fournisseurs. Des échantillons provenant des deux fournisseurs contiennent les pourcentages suivants de grains de premier choix, ordinaires et inutilisables :

Fournisseur	Premier choix	Ordinaire	Inutilisable
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si le fournisseur A facture CHF 125.- la tonne et le fournisseur B CHF 200.- la tonne, quelle quantité la société devrait-elle acheter chez chacun des fournisseurs pour satisfaire à ses besoins à un coût minimum ?

Soient

x = # tonnes du fournisseur A

y = # tonnes du fournisseur B

Contraintes

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,2x + 0,4y \geq 280 \\ 0,5x + 0,2y \geq 200 \end{cases}$$

Fonction objectif :

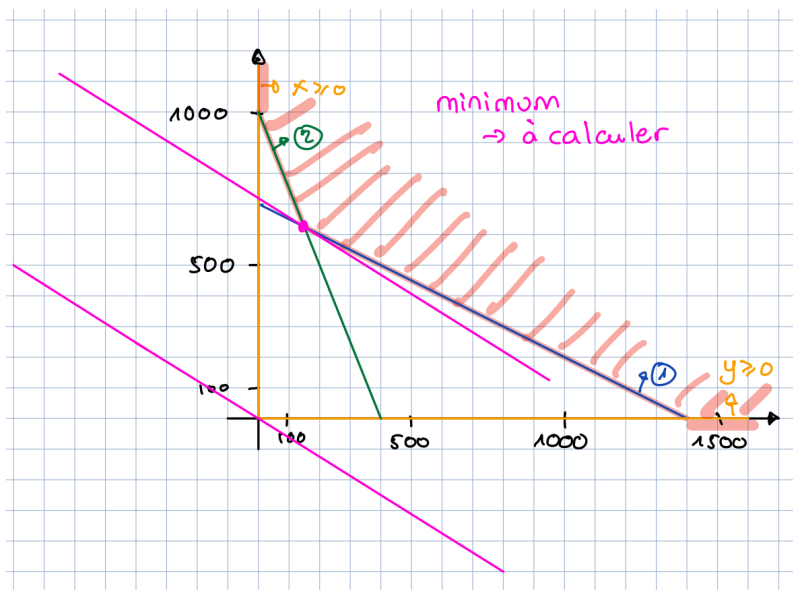
$$f(x; y) = 125x + 200y \text{ à minimiser}$$

$$\Rightarrow \text{pente : } y = -\frac{125x}{200} = -\frac{5}{8}x$$

test (0;0)

$$\begin{cases} 0,2x + 0,4y \geq 280 \\ 0,5x + 0,2y \geq 200 \end{cases} \quad \text{non} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y = 2800 \\ 5x + 2y = 2000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y = -2x + 2800 \\ 2y = -5x + 2000 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 700 & \textcircled{1} \\ y = -\frac{5}{2}x + 1000 & \textcircled{2} \end{cases}$$



minimum au croisement
① et ②

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x + 700 = -\frac{5}{2}x + 1000$$

$$\Leftrightarrow -x + 1400 = -5x + 2000$$

$$\Leftrightarrow 4x = 600$$

$$\Leftrightarrow x = 150$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 700 = -\frac{1}{2} \cdot 150 + 700 = 625$$

Il faut 150 tonnes du fournisseur A et 625 tonnes du fournisseur B.

Le coût minimum est de : $f(x; y) = 150 \cdot 125 + 625 \cdot 200 = 143\,750$ francs

1.13 Un sculpteur décide de créer deux nouveaux styles de statues; le modèle A et le modèle B. Le modèle A nécessite 1 heure de sculpture, 2 heures de ponçage et 1 heure de finition. Le modèle B nécessite 2 heures de sculpture, 1 heure de ponçage et 1 heure de finition. Il dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sculpture, de 22 heures à l'atelier de ponçage et de 12 heures à l'atelier de finition. Les profits qu'il peut réaliser pour chacun des modèles sont de CHF 200.- pour le modèle A et de CHF 300.- pour le modèle B.

Quel nombre de statues de chaque modèle doit-il fabriquer par jour, afin d'obtenir un profit maximal?

Soit x le nombre de modèles A et y le nombre de modèles B

	modèle A	modèle B	maximum
Sculpture	1h	2h	20h
ponçage	2h	1h	22h
Finitions	1h	1h	12h
coût	200	300	

contraintes

$$x + 2y \leq 20$$

$$2x + y \leq 22$$

$$x + y \leq 12$$

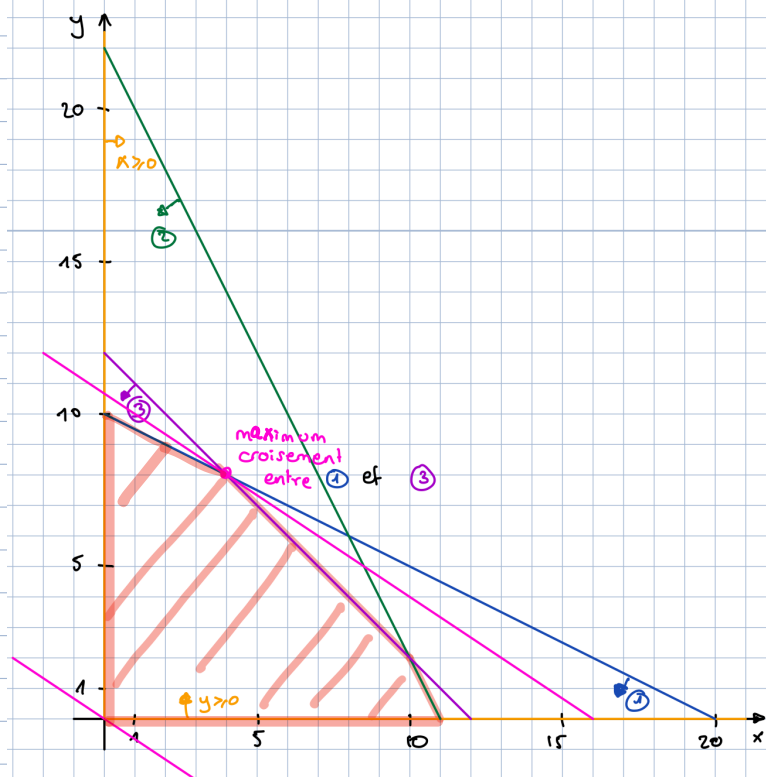
$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

Fonction objectif: $f(x; y) = 200x + 300y$ à maximiser

test (0,0)

$$\Rightarrow \text{pente: } 300y = -200x \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 & \text{où} \\ 2x + y \leq 22 & \text{où} \\ x + y \leq 12 & \text{où} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x + 20 \\ y = -2x + 22 \\ y = -x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 10 & \textcircled{1} \\ y = -2x + 22 & \textcircled{2} \\ y = -x + 12 & \textcircled{3} \end{cases}$$



Intersection entre ① et ③

$$-\frac{1}{2}x + 10 = -x + 12$$

$$\Leftrightarrow -x + 20 = -2x + 24$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 10 = 8$$

Le profit maximum sera fait lorsqu'il y aura 4 statues A et 8 statues B

$$f(4; 8) = 200 \cdot 4 + 8 \cdot 300 = 3200 \text{ francs}$$

Il sera de 3200 francs

1.14 Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau ci-dessous, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4	5	210 m ²
Pin	5	2,5	180 m ²
Noyer	6	5	240 m ²

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si :

- il gagne CHF 1'000.- par armoire et CHF 900.- par table ?
- il gagne CHF 1'200.- par armoire et CHF 1'000.- par table ?

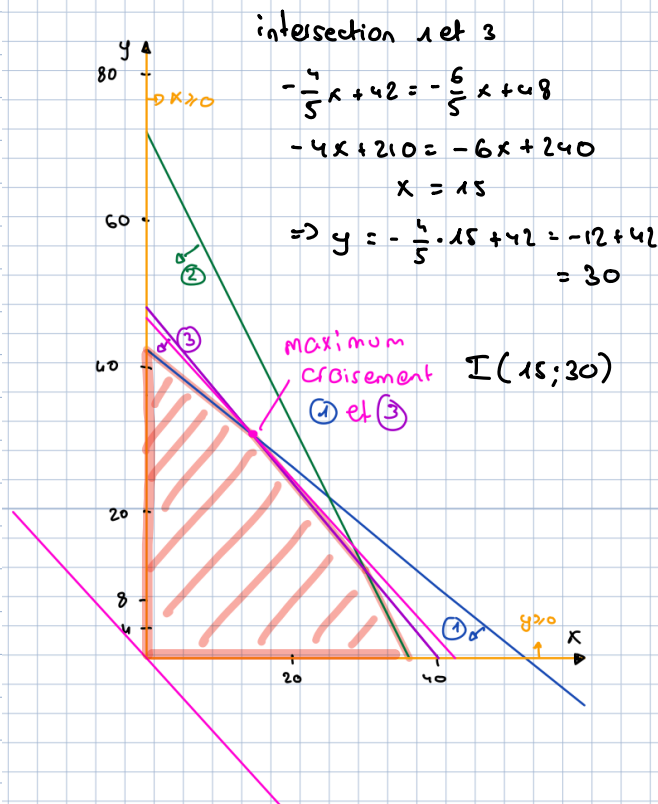
test (0,0)

$$\begin{cases} 4x + 5y \leq 210 & \text{oui} \\ 5x + 2,5y \leq 180 & \text{oui} \\ 6x + 5y \leq 240 & \text{oui} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5y = -4x + 210 \\ 2,5y = -5x + 180 \\ 5y = -6x + 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{5}x + 42 & \textcircled{1} \\ y = -2x + 72 & \textcircled{2} \\ y = -\frac{6}{5}x + 48 & \textcircled{3} \end{cases}$$

a) fonction objectif :

$$f(x; y) = 1000x + 900y$$

$$\Rightarrow \text{pente: } 900y = -1000x \Leftrightarrow y = -\frac{10}{9}x$$

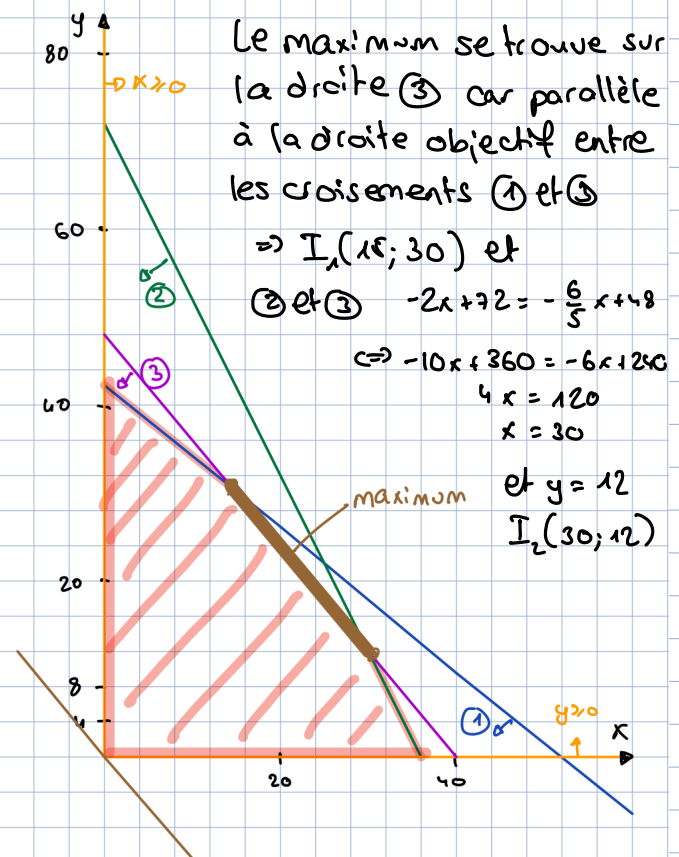


Le profit est maximum avec 15 armoires et 30 tables $\Rightarrow f(15; 30) = 15 \cdot 1000 + 30 \cdot 900 = 42'000$

b) fonction objectif :

$$f(x; y) = 1200x + 1000y$$

$$\Rightarrow \text{pente: } 1000y = -1200x \Leftrightarrow y = -\frac{6}{5}x$$



Tous les points du segments (15; 30) (30; 12) sont solutions. Les entiers sont (15; 30); (20; 24); (25; 18) et (30; 12)

Le profit max est de $15 \cdot 1200 + 30 \cdot 1000 = 48'000$

1.15 Un artisan fabrique deux modèles de lampes, un modèle de style canadien et un modèle de style futuriste. Pour chacune des lampes qu'il fabrique il doit utiliser deux machines M_1 et M_2 . Dans le cas d'une lampe de style canadien, il doit mettre 2 heures de travail sur la machine M_1 et 4 heures sur la machine M_2 . Pour une lampe de style futuriste, il doit mettre 3 heures de travail sur la machine M_1 et 2 heures sur la machine M_2 . Même avec l'aide d'apprentis, les machines ne peuvent fonctionner plus de 16 heures par jour. L'artisan connaît bien le marché et il sait qu'il vendra toutes les lampes qu'il peut fabriquer, en réalisant un profit de CHF 5.- sur chaque lampe de style canadien et un profit de CHF 4.- sur chaque lampe de style futuriste.

Déterminer le nombre de lampes de style canadien et le nombre de lampes de style futuriste que cet artisan devrait fabriquer à chaque jour, s'il veut maximiser son profit.

	canadien	futuriste	max
Machine M_1	2h	3h	16h
Machine M_2	4h	2h	16h
gain	5	4	

contraintes

$$2x + 3y \leq 16$$

$$4x + 2y \leq 16$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

fonction objectif $f(x; y) = 5x + 4y$ à maximiser :

pente: $4y = -5x \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x$

test (0;0)

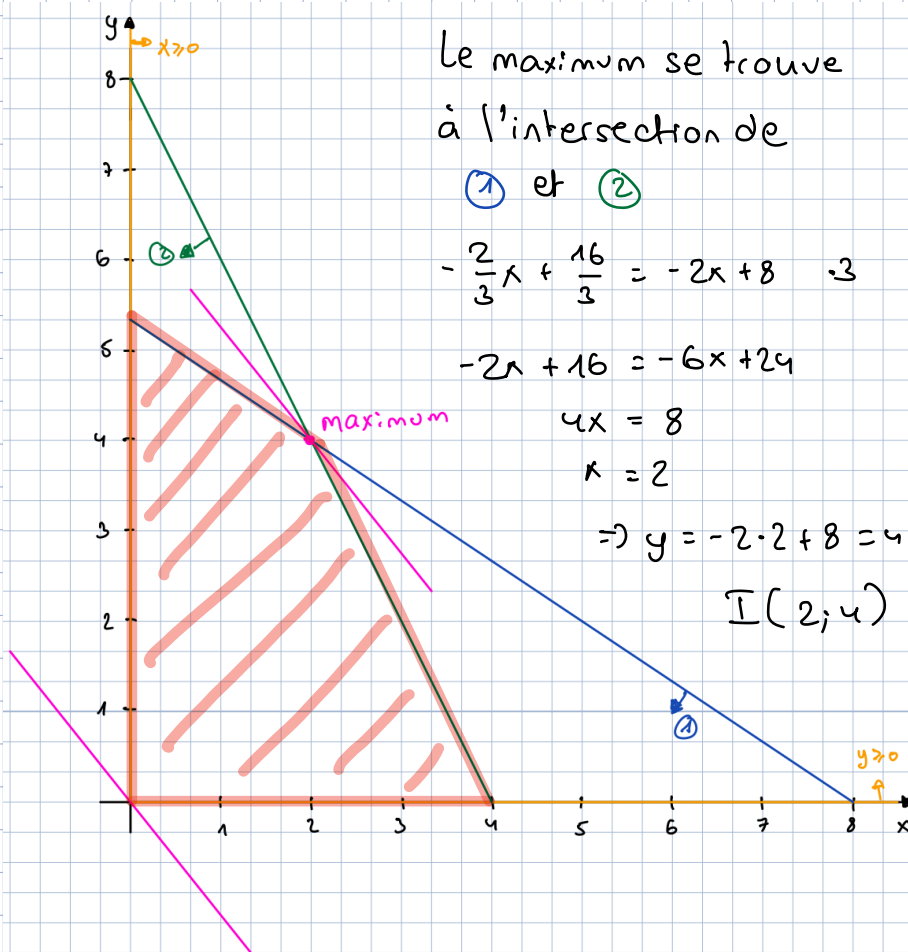
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 16 \\ 4x + 2y \leq 16 \end{cases}$$

Oui

Oui

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = -2x + 16 \\ 2y = -4x + 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} \quad (1) \\ y = -2x + 8 \quad (2) \end{cases}$$



Le maximum se trouve à l'intersection de

(1) et (2)

$$-\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} = -2x + 8 \quad \cdot 3$$

$$-2x + 16 = -6x + 24$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$$\Rightarrow y = -2 \cdot 2 + 8 = 4$$

$$I(2; 4)$$

Il faut 2 lampes de style canadien et 4 lampes de style futuriste.

Le gain maximum est de $f(2; 4)$
 $= 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 26$ francs

1.16 Une chaîne de montage automobile permet de monter deux types de voiture, la "standard" et la "luxe" d'après les conditions suivantes :

	standard	luxe
capacité maximum par jour de la chaîne de montage	500 voitures	300 voitures
nombre d'heures de travail par voiture	24 h	48 h
prix de revient par voiture sans main-d'oeuvre	CHF 5'000.-	CHF 6'500.-
bénéfice réalisé par voiture	CHF 10'000.-	CHF 30'000.-

Calculer le nombre de voitures de chaque type qu'il faut monter par jour afin de réaliser un bénéfice maximum, sachant que 19'200 heures de travail sont disponibles chaque jour et que l'investissement ne doit pas dépasser CHF 3'250'000.-.

Soit x le nombre de voitures de type standard
Soit y le nombre de voitures de type luxe

	standard	luxe
heures de travail	24 h	48 h
coût par voitures	5000	6500
bénéfice	10000	30000

Contraintes

$$24x + 48y \leq 19200$$

$$5000x + 6500y \leq 3'250'000$$

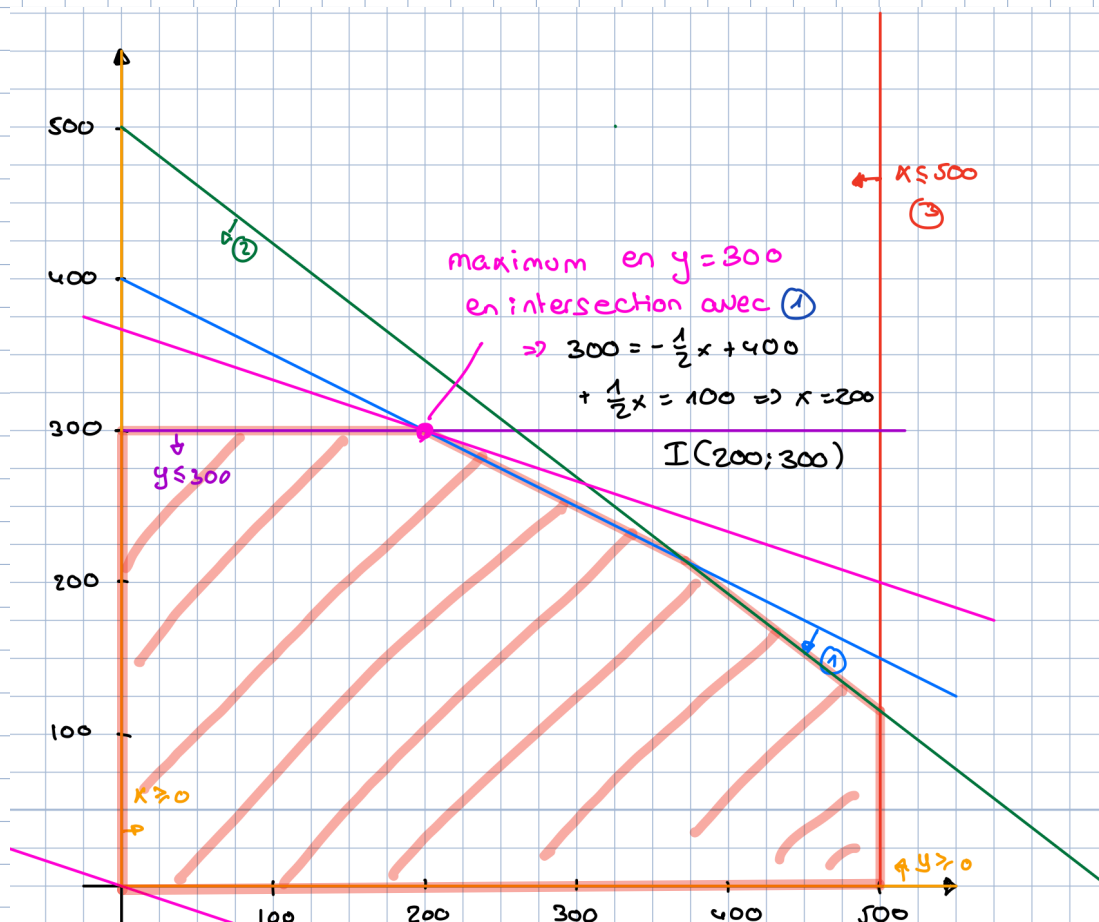
$$x \geq 0 \text{ et } x \leq 500 \quad (3)$$

$$y \geq 0 \text{ et } y \leq 300 \quad (4)$$

fonction objectif: $f(x,y) = 10'000x + 30'000y \Rightarrow$ pente: $y = -\frac{1}{3}x$

test (0;0)

$$\begin{cases} 24x + 48y \leq 19200 & \text{où} \\ 5000x + 6500y \leq 3'250'000 & \text{où} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x + 800 \\ 13y = -10x + 6500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 400 & (1) \\ y = -\frac{10}{13}x + 500 & (2) \end{cases}$$



Pour faire un gain maximum, il faut fabriquer 200 voitures de type standard et 300 voitures de luxe.

Le profit est de

$$\begin{aligned} f(200; 300) &= \\ 200 \cdot 10'000 + 300 \cdot 30'000 &= \\ 11'000'000 \end{aligned}$$

1.17 Une petite usine fabrique des savonnettes de deux modèles : pour le ménage M, de luxe L. La cuve de fabrication du mélange, pour des raisons mécaniques et de rendement, peut, en une cuvée, préparer une quantité de produit correspondant à au moins 100, mais au plus 1'500 savonnettes M, ou à au moins 80, mais au plus 1'200 savonnettes L. La demande de savonnettes est au plus de 1'400 pour le modèle M, au plus de 320 pour le modèle L. La machine, unique, à former, puis à emballer les savonnettes peut en débiter au maximum 1'520 par jour. On gagne CHF 0.40 par savonnette M et CHF 1.- par savonnette L.

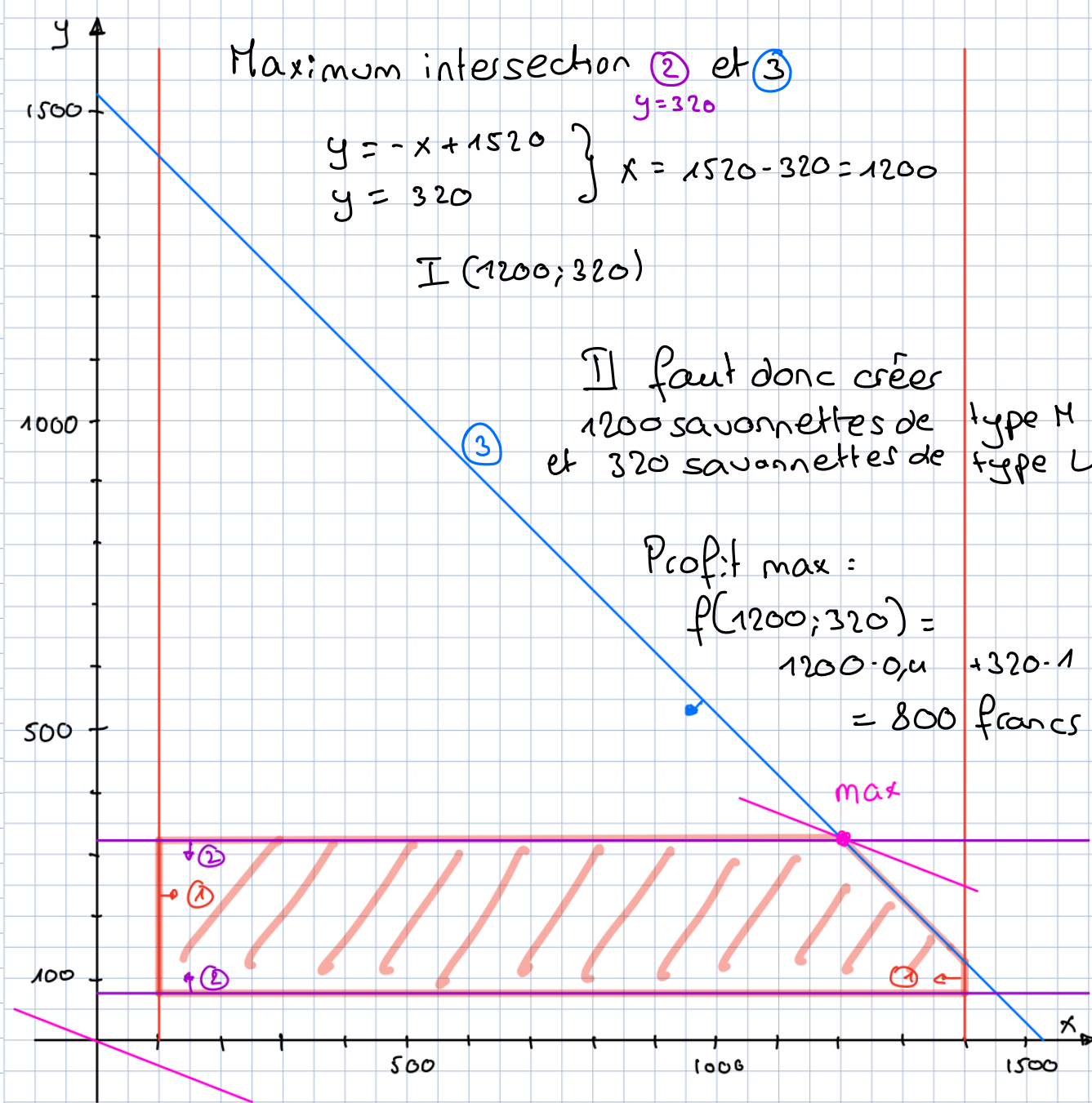
Quel bénéfice journalier maximum cette usine peut-elle faire et comment ?

Soit x le nombre de savonnettes de type M

Soit y le nombre de savonnettes de type L

Contraintes : production : $100 \leq x \leq 1500$ et $80 \leq y \leq 1200$ } $100 \leq x \leq 1400$ (1)
demande : $x \leq 1400$ et $y \leq 320$ } $80 \leq y \leq 320$ (2)
fabrication : $x + y \leq 1520$ test (0;0) : oui ✓
 $\Rightarrow y = -x + 1520$ (3)

Fonction objective $f(x,y) = 0,4x + 1y \Rightarrow$ pente : $y = -0,4x = -\frac{4}{10}x = -\frac{2}{5}x$
à maximiser



1.18 Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 8 € sur chaque raquette ordinaire et de 15 € sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre de raquettes produites ne devrait pas dépasser 80 par jour.

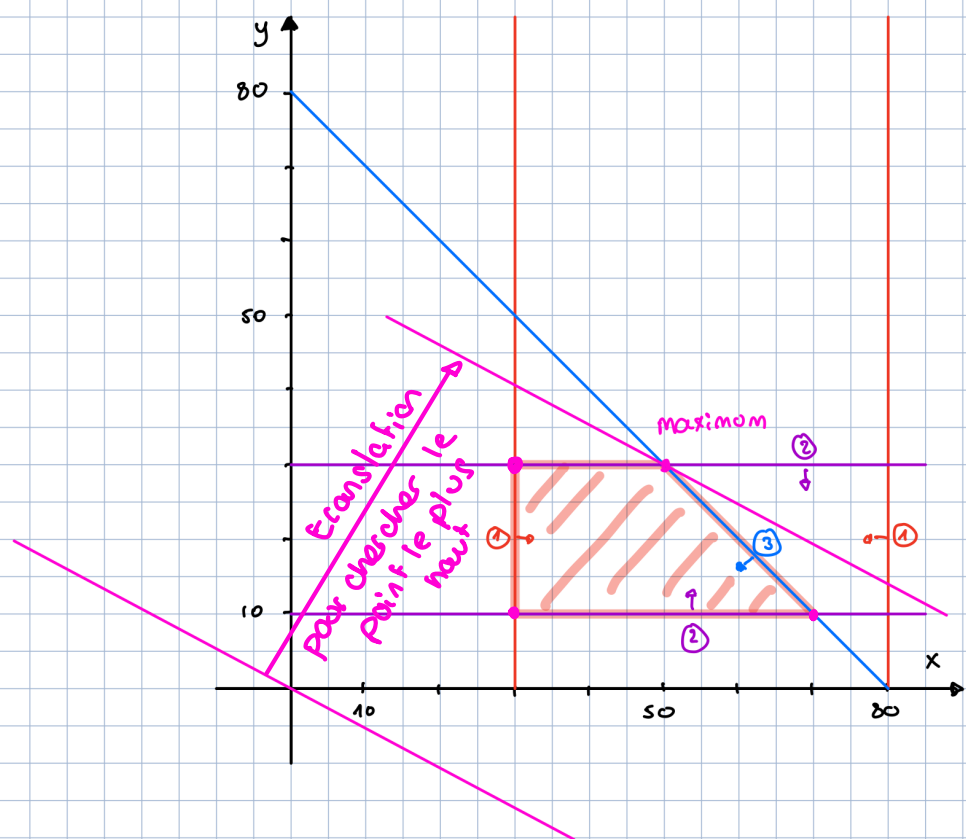
Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

Soit x le #
de raquettes
ordinaires

Soit y le # de
grandes raquettes

Contraintes: quantité: $30 \leq x \leq 80$ ① et $10 \leq y \leq 30$ ②
production: $x + y \leq 80$ test(0;0): ok $\Rightarrow y = -x + 80$ ③

Fonction objectif: $f(x,y) = 8x + 15y$ $\Rightarrow$ pente: $15y = -8x \Leftrightarrow y = -\frac{8}{15}x$
à maximiser



Maximum Intersection

② et ③
 $y = 30$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 30 \\ y = -x + 80 \end{cases} \Rightarrow x = 50$

$I(50, 30)$

Pour un profit maximum, il faut 50 raquettes ordinaires et 30 grandes raquettes.

Profit maximum

$f(50, 30) = 50 \cdot 8 + 30 \cdot 15$
 $= 850 \text{ euros}$

1.19 Une entreprise fabrique deux produits qu'elle désire vendre aux USA. Le produit A rapporte 4 € par kilogramme et le produit B rapporte 6 € par kilogramme. Ayant des moyens financiers limités, la société ne peut affréter qu'un seul avion. Celui-ci ne peut transporter que 50 tonnes et a un volume de 2100 m³. Le produit A a un volume de 30 m³ par tonne, le produit B a un volume de 70 m³ par tonne.

Combien de kilogrammes de chaque produit l'entreprise doit-elle mettre dans l'avion afin de maximiser ses gains ?

Soit x le nombre de produit A en tonnes

Soit y le nombre de produit B en tonnes

contraintes: poids : $x + y \leq 50$

volume : $30x + 70y \leq 2100 \Leftrightarrow 3x + 7y \leq 210$

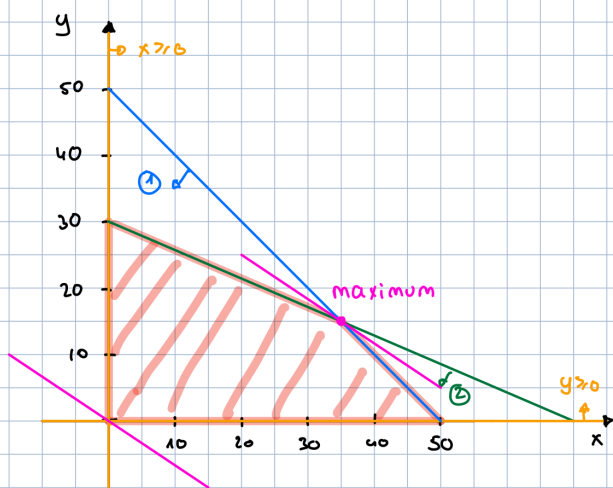
et : $x \geq 0$ et $y \geq 0$

test(0;0)

$$\text{oui} \left\{ \begin{array}{l} y = -x + 50 \quad (1) \\ y = -\frac{3}{7}x + 30 \quad (2) \end{array} \right.$$

Fonction objectif : $f(x; y) = 4000x + 6000y \Rightarrow$ pente : $6000y = -4000x$
à maximiser

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x$$



Maximum intersection (1) et (2)

$$-x + 50 = -\frac{3}{7}x + 30$$

$$-7x + 350 = -3x + 210$$

$$140 = 4x \quad :4$$

$$35 = x$$

$$y = 50 - 35 = 15 \Rightarrow I(35; 15)$$

Pour faire un profit maximum, il faut 35 tonnes de produits A et 15 tonnes de produits B.

$$\text{Profit max : } f(35; 15) = 35 \cdot 4000 + 15 \cdot 6000 = 230'000 \text{ euros}$$

1.20 Pour fleurir un parc, il faut au minimum 1200 jacinthes, 3200 tulipes et 3000 narcisses.

Un premier pépiniériste propose le lot A pour 15 € comportant 30 jacinthes, 40 tulipes et 30 narcisses. Un deuxième pépiniériste propose le lot B pour 12 € comportant 10 jacinthes, 40 tulipes et 50 narcisses.

Combien faut-il acheter de lots A et de lots B pour minimiser la dépense de l'achat des fleurs ?

Soit x le # de lot A

Soit y le # de lot B

contraintes : jacinthes : $30x + 10y \geq 1200$

tulipes : $40x + 40y \geq 3200$

narcisses : $30x + 50y \geq 3000$

et $x \geq 0$ et $y \geq 0$

test (0;0)

non

non

non

$$\Rightarrow \begin{cases} 30x + 10y = 1200 \\ 40x + 40y = 3200 \\ 30x + 50y = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 120 \\ x + y = 80 \\ 3x + 5y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 120 \text{ (1)} \\ y = -x + 80 \text{ (2)} \\ y = -\frac{3}{5}x + 60 \text{ (3)} \end{cases}$$

$f(x,y) =$

Fonction objectif : $15x + 12y$ $\Rightarrow$ pente : $12y = -15x \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x$
à minimiser



Minimum : intersection (1) et (2)

$$-3x + 120 = -x + 80$$

$$40 = 2x$$

$$20 = x$$

$$\Rightarrow y = -20 + 80 = 60$$

Pour payer le minimum en respectant les contraintes, il faudra 20 lots A et 60 lots B

Coût minimum : $f(20;60)$

$$20 \cdot 15 + 60 \cdot 12 = 1020 \text{ euros}$$

1.21 Un artisan de la région lausannoise produit deux types de glaces, velvet et classic, vendues en barquettes. La production quotidienne de glace est limitée à 700 barquettes. Pour confectionner une barquette velvet, il a besoin de 90 grammes de crème et 40 grammes de sucre. Pour confectionner une barquette classic, il a besoin de 45 grammes de crème et 120 grammes de sucre.

L'artisan dispose de 54 kilogrammes de crème et 60 kilogrammes de sucre par jour.

Déterminer le nombre de barquettes de chaque type que l'artisan doit produire chaque jour en vue de maximiser son bénéfice, sachant qu'il reçoit 60 centimes par barquette velvet et 40 centimes par barquette classic.

Soit x le # de barquettes velvet

Soit y le # de barquettes classic

Contraintes : # de barquettes $x + y \leq 700$

crème : $90x + 45y \leq 54000$

sucré : $40x + 120y \leq 60000$

et $x \geq 0$ et $y \geq 0$

test (0;0)

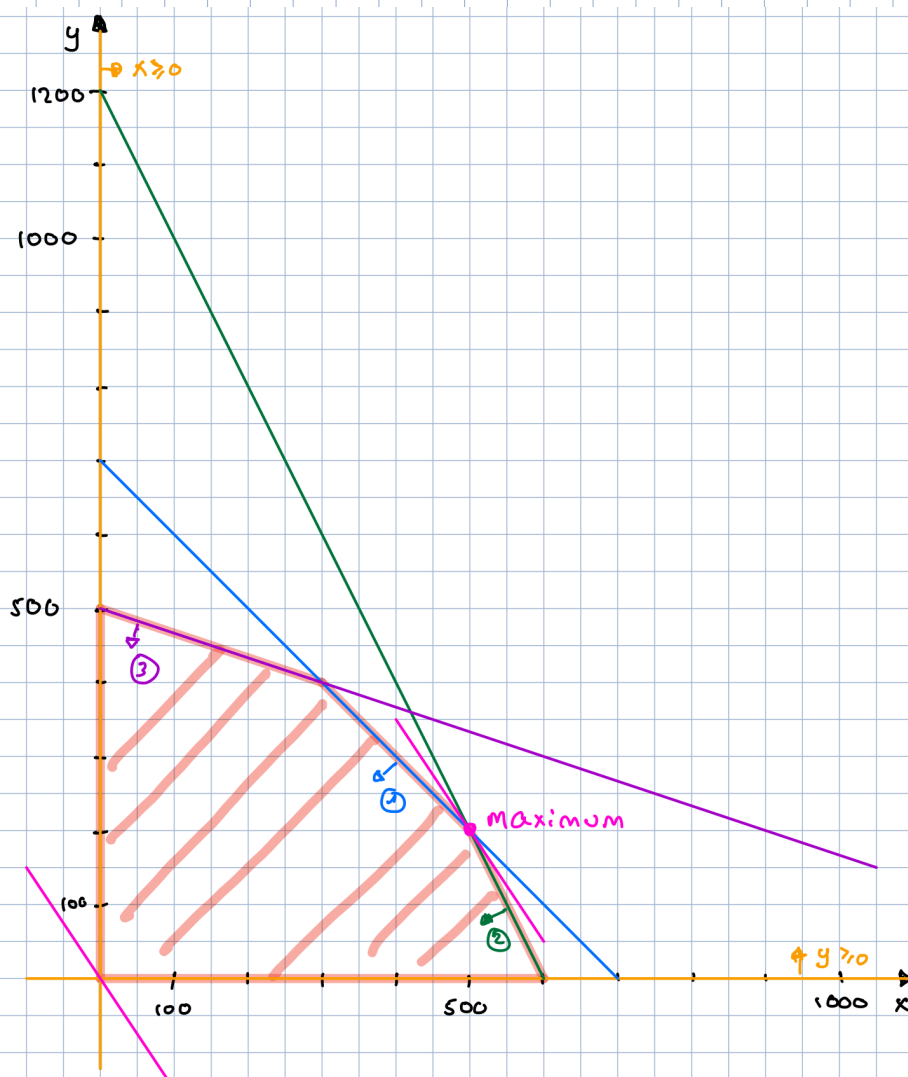
oui

oui

oui

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 700 \\ 90x + 45y = 54000 \\ 40x + 120y = 60000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 700 \\ 2x + y = 1200 \\ x + 3y = 1500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 700 & \textcircled{1} \\ y = -2x + 1200 & \textcircled{2} \\ y = -\frac{1}{3}x + 500 & \textcircled{3} \end{cases}$$

fonction objectif : $f(x,y) = 0,6x + 0,4y \Rightarrow$ pente : $0,4y = -0,6x \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x$
à maximiser



Maximum à l'intersection de $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$

$$\Rightarrow -x + 700 = -2x + 1200 \\ x = 500$$

$$\Rightarrow y = -500 + 700 = 200 \\ I(500; 200)$$

Pour un profit maximum, il faut 500 barquettes velvet et 200 barquettes classic.

Le profit max est de

$$f(500; 200) = 500 \cdot 0,6 + 200 \cdot 0,4 \\ = 300 + 80 = 380 \text{ francs}$$

1.22 L'entreprise Jardinbiquet, productrice de nains de jardin, voyant le marché saturé, décide de remplacer une partie de cette production par celles de statues de Blanche-Neige et de dinosaures. Pour cela, elle disposera chaque jour de 5 heures d'atelier de moulage, 16 heures d'atelier de peinture et 3 heures d'atelier d'emballage. Chaque exemplaire de Blanche-Neige nécessite 3 minutes de moulage, 24 minutes de peinture et 4 minutes d'emballage. Chaque exemplaire de dinosaure nécessite 10 minutes de moulage, 15 minutes de peinture et 5 minutes d'emballage. Le profit est de CHF 40.- par statue de Blanche-Neige et de CHF 35.- par dinosaure.

Déterminer le nombre de statues de Blanche-Neige et le nombre de dinosaures à produire pour maximiser le profit.

Soit x le # de statues de Blanche-Neige

Soit y le # de statues de dinosaures

Contraintes : moulage : $3x + 10y \leq 5 \cdot 60 = 300$
 peinture : $24x + 15y \leq 16 \cdot 60 = 960$
 emballage : $4x + 5y \leq 3 \cdot 60 = 180$
 et $x \geq 0 ; y \geq 0$

test (0;0)

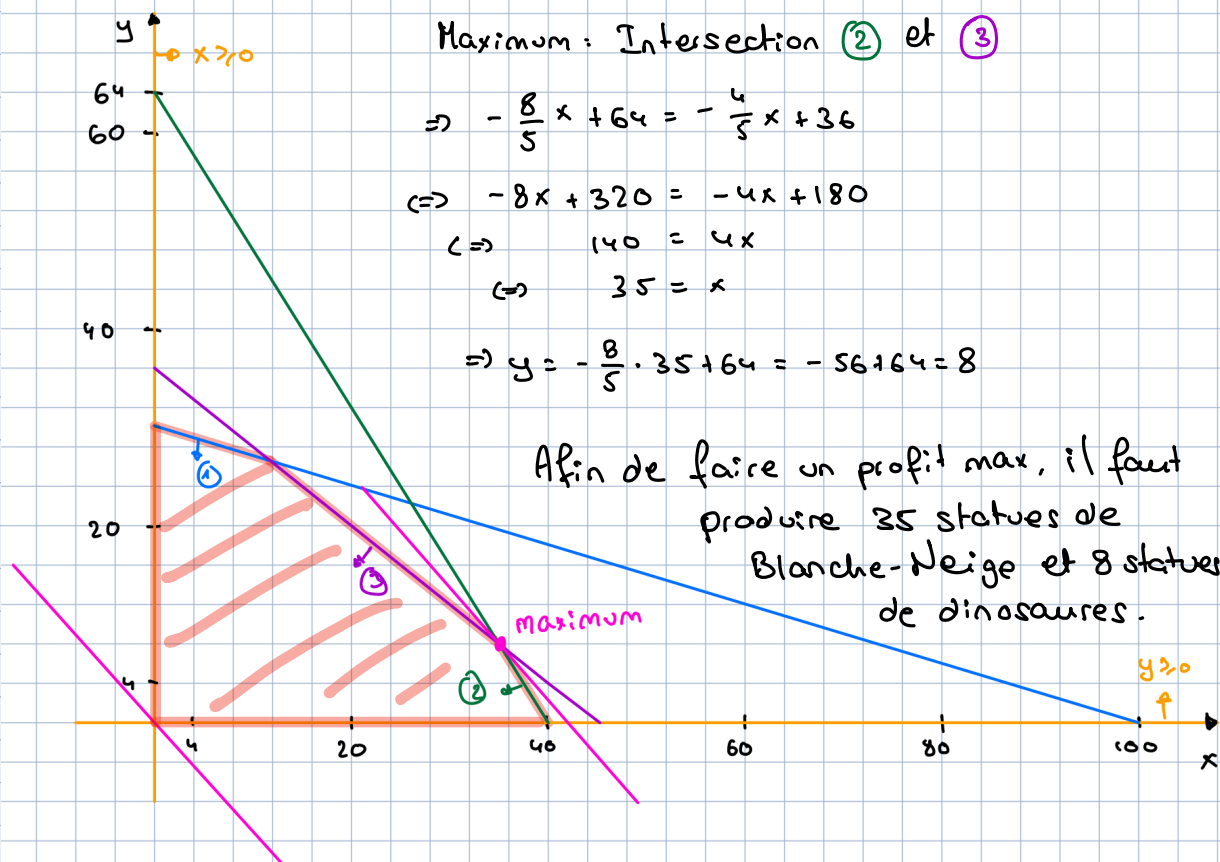
oui

oui

oui

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 300 \\ 24x + 15y = 960 \\ 4x + 5y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = -3x + 300 \\ 5y = -8x + 320 \\ 5y = -4x + 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{10}x + 30 & \textcircled{1} \\ y = -\frac{8}{5}x + 64 & \textcircled{2} \\ y = -\frac{4}{5}x + 36 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Fonction objectif : $f(x; y) = 40x + 35y \Rightarrow$ pente : $35y = -40x \Leftrightarrow y = -\frac{8}{7}x$
 à maximiser



Profit max $f(35; 8) = 35 \cdot 40 + 8 \cdot 35 = 1680$ francs

1.23 Une grande entreprise de distribution doit acheter des pommes chez deux producteurs de fruits. Elle a besoin d'au moins 60 tonnes de pommes de première qualité, 45 tonnes de pommes de deuxième qualité et 24 tonnes de pommes de qualité inférieure pour la production du cidre. Un échantillon de fruits provenant du producteur Apifruits indique que 30% de ses pommes sont de première qualité, 50% de deuxième qualité et 20% de qualité inférieure. Un second échantillon de fruits provenant du producteur Jonagold indique que 60% de ses pommes sont de première qualité, 25% de deuxième qualité et 15% de qualité inférieure.

Si Apifruits facture CHF 1200.- pour une tonne de pommes et Jonagold CHF 1400.- la tonne, combien de tonnes l'entreprise doit-elle commander à chaque producteur pour couvrir ses besoins au moindre coût ?

Soit $x = \#$ tonnes

Apifruits

Soit $y = \#$ tonnes

Jonagold

Contraintes première qualité : $0,3x + 0,6y \geq 60$
 deuxième qualité : $0,5x + 0,25y \geq 45$
 qualité inférieure : $0,2x + 0,15y \geq 24$
 et $x \geq 0 ; y \geq 0$

test (0;0)

non

non

non

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,3x + 0,6y = 60 \\ 0,5x + 0,25y = 45 \\ 0,2x + 0,15y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 600 \\ 2x + y = 180 \\ 20x + 15y = 2400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 100 & \textcircled{1} \\ y = -2x + 180 & \textcircled{2} \\ y = -\frac{4}{3}x + 160 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Fonction objectif : $f(x,y) = 1200x + 1400y \Rightarrow$ pente : $1400y = -1200x \Leftrightarrow y = -\frac{6}{7}x$
 à minimiser



Minimum : intersection de
 $\textcircled{1}$ et $\textcircled{3}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x + 100 = -\frac{4}{3}x + 160 \quad (\cdot 6)$$

$$-3x + 600 = -8x + 960$$

$$5x = 360$$

$$x = 72$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 72 + 100 = 64$$

$$\Rightarrow I(72; 64)$$

Pour produire le cidre à un coût minimum, il faut 72 tonnes d'Apifruits et 64 tonnes de Jonagold.

$$\text{Coût minimum : } f(72; 64) = 72 \cdot 1200 + 64 \cdot 1400 = 176\,000 \text{ francs}$$

1.24 Sophie projette un voyage d'une longueur de 8'000 km aux USA, qu'elle parcourra en train, en car et en bateau. Les prix et les vitesses de déplacement sont donnés ci-dessous :

	Bateau	Car	Train
Prix au km en CHF	0,15	0,20	0,25
Vitesse en km/h	30	40	80

Elle souhaite parcourir au moins 3'000 km en bateau, et ne désire pas effectuer plus de kilomètres en train qu'en car.

Quelles distances doit-elle parcourir avec chaque moyen de transport si elle veut que le prix total de son voyage ne dépasse pas CHF 1'500.- et que sa durée soit minimum ?

Soit x le # de km en bateau

Soit y le # de km en car

Soit z le # de km en train

Contraintes :

$$x + y + z = 8000 \Leftrightarrow z = 8000 - x - y$$

$$x \geq 3000$$

$$y \geq z$$

$$0,15 \cdot x + 0,2 \cdot y + 0,25 \cdot z \leq 1500$$

$$\text{et } \underline{y \geq 0}; \quad z \geq 0$$

test (0;0)

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x \geq 3000 & \text{non} \\ 2y \geq -x + 8000 & \text{non} \\ 0,05y \geq -0,1x + 500 & \text{non} \end{cases}$$

on substitue z .

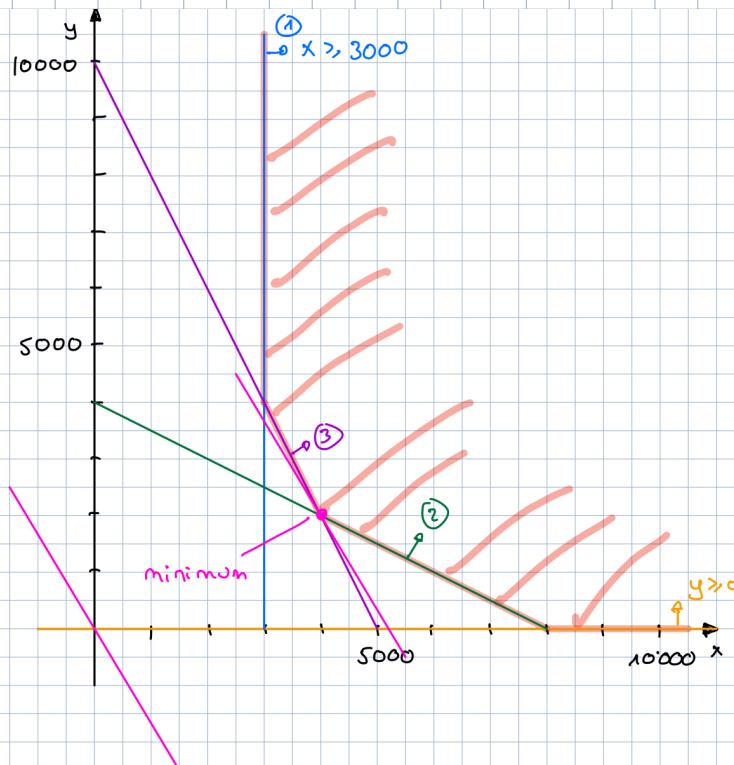
$$\begin{cases} x \geq 3000 \\ y \geq 8000 - x - y \\ 0,15x + 0,2y + 0,25(8000 - x - y) \leq 1500 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3000 & \textcircled{1} \\ y = -\frac{1}{2}x + 4000 & \textcircled{2} \\ y = -2x + 10000 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Fonction objectif: $f(x; y; z) = \frac{x}{30} + \frac{y}{40} + \frac{z}{80} = \frac{8x + 6y + 3z}{240} =$
à minimiser

$$= \frac{8x + 6y + 3(8000 - x - y)}{240} = \frac{1}{240} \cdot (5x + 3y + 24000)$$

$$\Rightarrow \text{pente: } 5x = -3y \Leftrightarrow \underline{y = -\frac{5}{3}x}$$



Le minimum se situe à l'intersection de ② et ③

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x + 4000 = -2x + 10000$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 6000 \Leftrightarrow x = 4000$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 4000 + 4000 = 2000$$

$$z = 8000 - 4000 - 2000 = 2000$$

$\Rightarrow$ Il y a 4000 km en bateau et 2000 km en train et en car

$$\text{Le temps de parcours est de: } \frac{4000}{30} + \frac{2000}{40} + \frac{2000}{80} = 208,3h = 208h20min.$$