

Chapitre 2

Géométrie

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ orthonormé ($\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ et $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$).

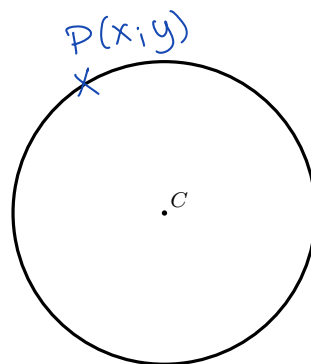
Le cercle

1. Équation cartésienne du cercle

Définition 1.

Le **cercle** γ de centre $C(c_1; c_2)$ et de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+$) est l'ensemble des points $P(x; y)$ du plan tels que la distance de C à P est égale à r .

$$\begin{aligned} S(C; P) &= r \\ \Leftrightarrow \|\vec{CP}\| &= r \\ \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x-c_1 \\ y-c_2 \end{pmatrix} \right\| &= r \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2} &= r \quad |()^2 \\ \Leftrightarrow (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 &= r^2 \end{aligned}$$



Cette équation est appelée équation cartésienne du cercle.

Exemples

- a) Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle de centre $C(2; -5)$ et de rayon $r = 3$ u.

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

- b) On donne un cercle γ par son équation cartésienne $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 20$.
Donner les coordonnées du centre C et le rayon r de γ .

$$C(-1; 6) \quad \text{et} \quad r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

En développant l'équation cartésienne du cercle on obtient :

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

$$(x^2 - 2c_1x + c_1^2) + (y^2 - 2c_2y + c_2^2) = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 - r^2 = 0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne développée du cercle. Elle est de la forme

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cependant toutes les équations de ce type ne définissent pas forcément un cercle.

Exemples

Les équations suivantes définissent-elles des cercles? Si oui donner les coordonnées du centre et le rayon.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

Remettre les équations développées sous la forme: $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -1 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$\Rightarrow$ cercle $C(1;2)$ et $r=2$

b) $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 100 = 0$

$$x^2 - 16x + 64 + y^2 + 12y + 36 = -100 + 64 + 36$$

$$(x-8)^2 + (y+6)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ c'est un point $C(8; -6)$
 $r^2 \Rightarrow r = \sqrt{0} = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -3 + 1 + 1$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ ce n'est pas un cercle car r^2 ne peut pas être négatif.

d) $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 44 = 0$

ce n'est pas un cercle car il n'y a pas de terme en xy dans l'équation développée d'un cercle.

ex 2.1.1 $\rightarrow$ i) / ex 2.1.2 a) $\rightarrow$ e) + f) g)