

Exemple : le marchand de chaussettes

Un marchand vend deux types de chaussettes :

- des chaussettes en coton ;
- des chaussettes en laine.

Le marchand, observateur, a remarqué que les clients préféraient acheter leurs chaussettes par lot. Il leur propose donc deux lots :

- un lot à 6 francs avec 2 paires en coton et 4 paires en laine ;
- un lot à 8 francs avec 2 paires en coton et 8 paires en laine.

Ce jour-là, il dispose au total de 24 paires en coton et 84 paires en laine. Il se demande **quels lots** il doit présenter à sa clientèle pour réaliser une recette maximale. Essayons de l'aider !

On pose : x =nbre...de...lots...à...6 francs..... y =nbre...de...lots...à...8 francs.....

Fonction objectif : $f(x; y) = 6x + 8y$

Contraintes :

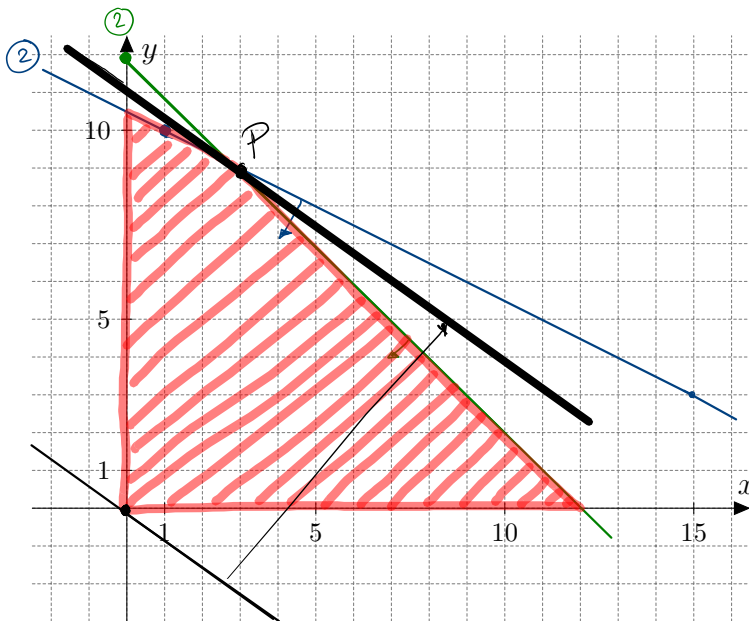
	x	y	Max	contraintes
coton	2x	2y	24	$2x+2y \leq 24$
laine	4x	8y	84	$4x+8y \leq 84$
contraintes	$x \geq 0$	$y \geq 0$		

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+2y \leq 24 \quad \textcircled{1} \\ 4x+8y \leq 84 \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}. 2x+2y &= 24 \\ x+y &= 12 \\ y &= -x+12 \\ \bullet (0,0) : 0 &\leq 24 ? \text{ oui} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2}. 4x+8y &= 84 \\ x+2y &= 21 \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2} \\ \text{pr à coords entières :} \\ \text{si } x=1 : y &= -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = \frac{20}{2} = 10 \\ \Rightarrow (1,10) \\ \bullet (0,0) : 0 &\leq 84 ? \text{ oui} \end{aligned}$$

Construction du polygone des contraintes :



A optimiser : $f(x; y) = 6x + 8y = 0$

$$\begin{aligned} 8y &= -6x \\ y &= -\frac{6}{8}x \\ y &= -\frac{3}{4}x \end{aligned}$$

Maximum pour P : $\textcircled{1} \cap \textcircled{2}$

$$-x+12 = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2} \quad | \cdot 2$$

$$-2x+24 = -x+21$$

$$3 = x \quad \textcircled{1} \Rightarrow y = -3+12 = 9$$

$$\Rightarrow P(3; 9)$$

$$f(3; 9) = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 9 = 18 + 72 = 90$$

Réponse au problème :

Il doit présenter 3 lots à 6 francs et 9 lots à 8 francs pour une recette maximale de 90 francs.

Marche à suivre pour résoudre un problème de programmation linéaire :

1. On pose x et y les 2 inconnues apparaissant dans le problème.
2. On détermine la fonction objectif $f(x; y)$ à optimiser (de la forme $f(x; y) = ax + by$).
3. On traduit toutes les contraintes en un système d'inéquations.
4. On représente le polygone R des contraintes.
5. On trace la droite donnée par $f(x; y) = 0$ (pente $m = -\frac{a}{b}$ et passant par l'origine).
6. On translate cette droite afin de la faire passer par le sommet du polygone des contraintes qui optimise la fonction objectif.
7. On calcule les coordonnées du sommet optimal P .
8. On calcule la valeur de la fonction objectif f en ce point.
9. On interprète la solution et on répond au problème posé par une phrase.