

Polygone des contraintes

Nous avons observé que, si un système d'inéquations contient uniquement des inéquations linéaires de la forme :

$$ax + by \geq c \quad \text{ou} \quad ax + by \leq c \quad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ des nombres réels,}$$

alors la représentation graphique de ce système est une région **R** du plan, *limitée ou non* par un polygone convexe. Dans le cadre des exercices de programmation linéaire, cette région sera appelée le **polygone des contraintes**. (les inéquations sont les contraintes)

Exemple :

Dans une usine d'informatique :

- Pour construire une carte mère A, il faut 4 mémoires de type M1 et 3 de type M2.
- Pour construire une carte mère B, il faut 2 mémoires de type M1 et 3 de type M2.
- L'usine ne peut disposer par jour que de 16 mémoires de type M1 et 15 de type M2.

Soit x le nombre de cartes mères A et y le nombre de cartes mères B produites chaque jour.

- Écrire un système d'inéquations traduisant les contraintes imposées à l'usine.
- Représenter graphiquement cette zone de contraintes.
- Déterminer les sommets du polygone de contraintes.
- Le point $P(3; 1)$ vérifie-t-il le système de contraintes ?

	X nbre de cartes A	y nbre de cartes B	Max	contraintes
nbre de M ₁	4x	2y	16	$4x + 2y \leq 16$
nbre de M ₂	3x	3y	15	$3x + 3y \leq 15$
contraintes	$x \geq 0$	$y \geq 0$		

$$a) \begin{cases} x \geq 0 & \textcircled{3} \\ y \geq 0 & \textcircled{4} \\ 4x + 2y \leq 16 & \textcircled{1} \\ 3x + 3y \leq 15 & \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 4x + 2y = 16 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

test (0;0) : $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \leq 16$? oui

test (0;0) : $3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \leq 15$? oui

$$S_1: \textcircled{3} \cap \textcircled{4} : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{S_1(0;0)} = O(0;0)$$

$$S_2: \textcircled{4} \cap \textcircled{1} : \begin{cases} y=0 \\ 4x+2y=16 \end{cases} \xrightarrow{\text{on remplace } y \text{ par } 0 \text{ dans la 2e équation}} \Rightarrow 4x+0=16 \Rightarrow x=4 \Rightarrow \underline{S_2(4;0)}$$

$$S_3: \textcircled{1} \cap \textcircled{2} : \begin{cases} 4x+2y=16 & | :2 \\ 3x+3y=15 & | :3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=8 & | \cdot 1 \\ x+y=5 & | \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x+y=8 \\ -x-y=-5 \\ \hline x=3 \end{array}$$

$$\underline{\text{ou}} \begin{cases} y=-2x+8 \\ y=-x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{dans 2e} \\ \Rightarrow 3+y=5 \\ y=2 \end{array} \Rightarrow \underline{S_3(3;2)}$$

$$\Rightarrow -2x+8 = -x+5 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow \dots$$

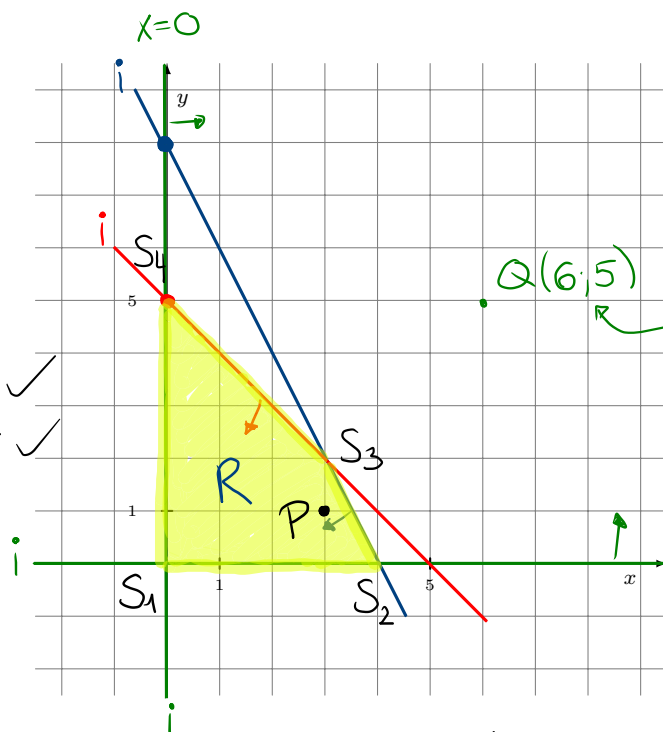
$$S_4: \textcircled{3} \cap \textcircled{2} : \begin{cases} x=0 \\ 3x+3y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-x+5 \end{cases} \Rightarrow y=5 \Rightarrow \underline{S_4(0;5)}$$

d) $P(3;1)$
vérifie les
contraintes
car

$$\begin{cases} 3 \geq 0 \\ 1 \geq 0 \\ 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 14 \leq 16 \\ 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 12 \leq 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

et $P(3;1)$
appartient à R
($P(3;1) \in R$)

Cela signifie que l'usine peut construire $\frac{5}{1}$ 3 cartes mère A et 1 carte mère B en un jour.



R : polygone
des contraintes

Remarque:

$Q \notin R$

Q ne satisfait pas
les conditions

L'usine ne peut pas
construire 6 cartes-
mère A et 5 cartes-
mère B en
un jour.