

Programmation linéaire ou optimisation d'une fonction à deux variables

Dans les problèmes de **programmation linéaire**, nous traitons des **systèmes d'inéquations** conjointement avec une fonction à 2 variables de la forme $f(x; y) = ax + by + c$ avec a , b et c des nombres réels et $(x; y)$ un point situé dans le polygone de contraintes (c'est-à-dire une solution du système).

Les solutions du système, c'est-à-dire les couples $(x; y)$ correspondant aux points situés dans le polygone des contraintes, sont appelées les **solutions possibles** du problème.

f est appelée une **fonction objectif**. Dans les applications commerciales, la valeur f peut représenter le coût, le gain, la perte ou une ressource physique, et l'objectif sera de trouver un point précis $P(x; y)$ dans R où $f(x; y)$ prend une valeur maximum ou minimum. Découvrons, à l'aide de l'exercice 1.4, où se situe ce point.

Exercice 1.4 :

On considère la fonction $f(x; y) = 3x + 4y$.

a) Calculer la valeur que prend cette fonction pour chacun des points ci-dessous :

$$A(0; 0) \Rightarrow f(0; 0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$B(0; 3) \Rightarrow f(0; 3) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 12$$

$$C(4; 3) \Rightarrow f(4; 3) = \dots 24$$

$$D(4; 6) \Rightarrow f(4; 6) = \dots 36$$

$$E_1(0; 12) \Rightarrow f(0; 12) = \dots 48$$

$$E_2(4; 9) \Rightarrow f(4; 9) = \dots 48$$

$$E_3(8; 6) \Rightarrow f(8; 6) = \dots 48$$

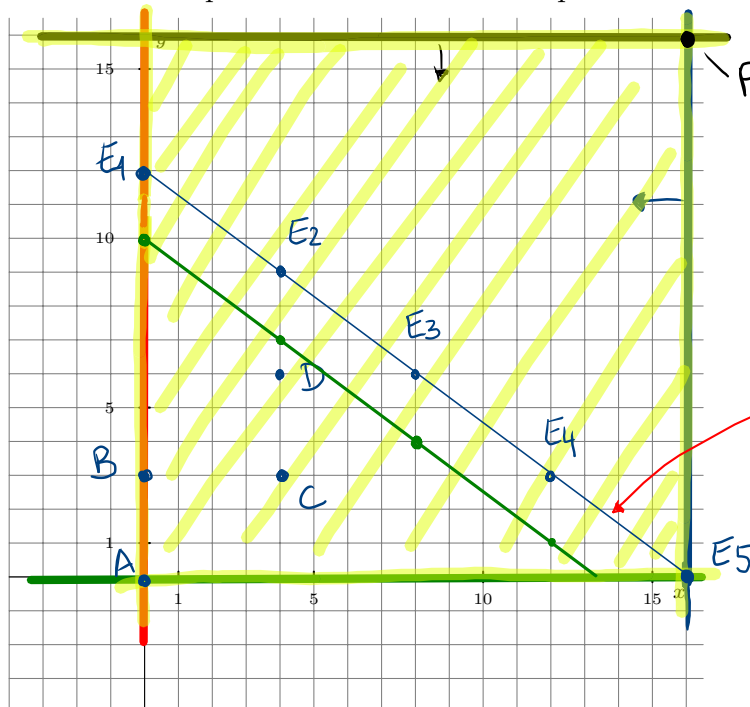
$$E_4(12; 3) \Rightarrow f(12; 3) = \dots 48$$

$$E_5(16; 0) \Rightarrow f(16; 0) = \dots 48$$

Rem: on peut obtenir la même valeur avec des points différents

b) On considère le carré délimité par les inéquations $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 16$ et $y \leq 16$.

Déterminer le point situé dans ce carré qui maximise la fonction f .



$$f(x; y) = 3x + 4y \text{ maximum?}$$

On prend le plus grand x et le plus grand y possible dans le carré

$$\Rightarrow x = 16 \text{ et } y = 16$$

$$\Rightarrow \underline{P(16; 16)}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 48 \\ 4y &= -3x + 48 \\ y &= -\frac{3}{4}x + 12 \end{aligned}$$

$$f(x,y) = 3x + 4y = 40$$

c) Identifier 4 points situés dans le carré défini en b) tels que la fonction f prenne la valeur 40 :

$$(4; 7) \quad (0; 10) \quad (12; 1) \quad (8; 4)$$

Où sont situés les autres points qui satisfont cette condition ? Que peut-on en déduire ?

Sur une droite, $3x + 4y = 40$
 $4y = -3x + 40$
 $y = -\frac{3}{4}x + 10$

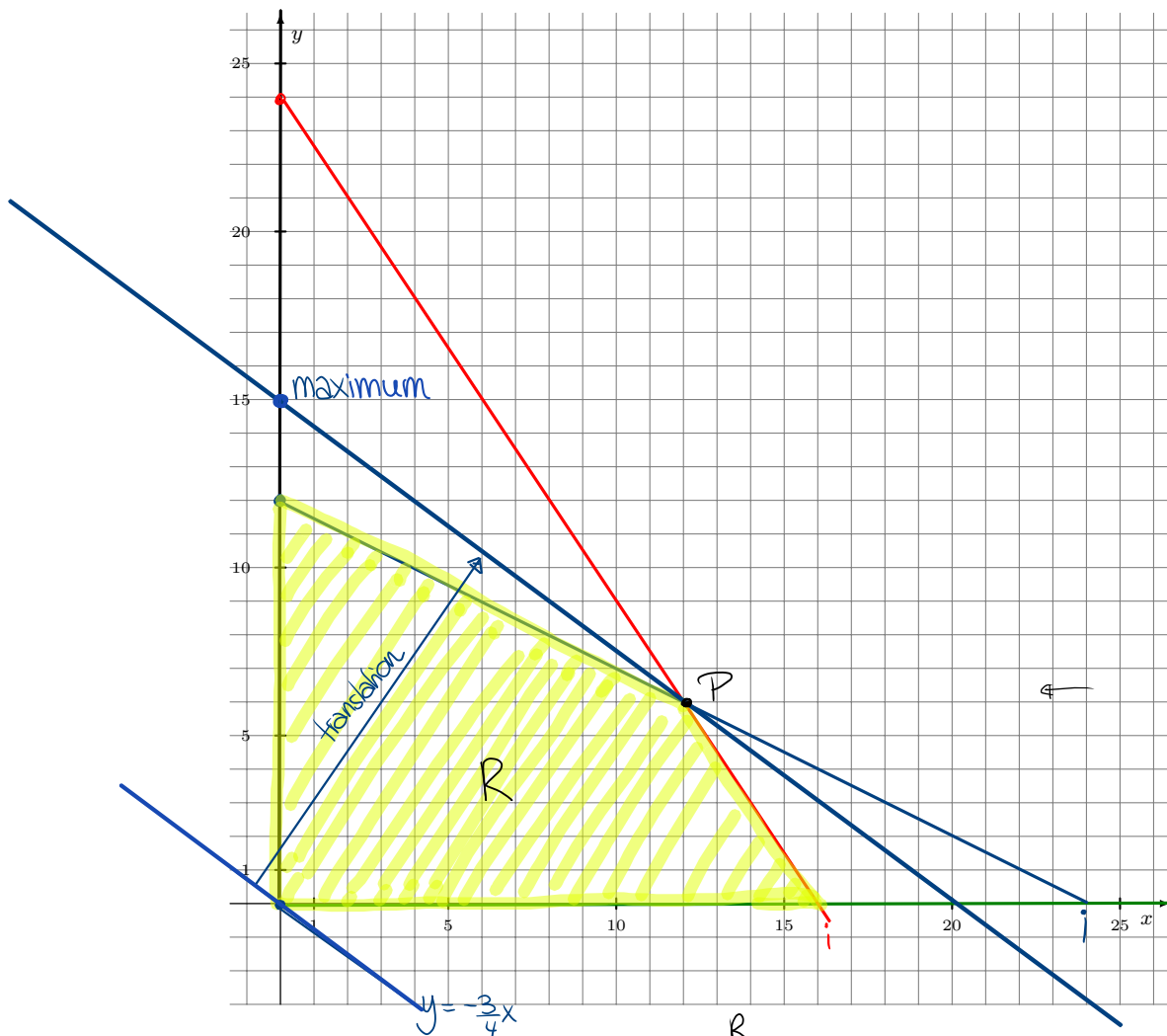
Que les points qui satisfont une équation $f(x,y) = c$ sont sur une droite.

Ici $3x + 4y = c$
 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{c}{4}$
 $\Rightarrow m = -\frac{3}{4}$

d) On considère le domaine délimité par les inéquations :

$$x \geq 0, y \geq 0, \underline{x + 2y - 24 \leq 0} \text{ et } \underline{3x + 2y - 48 \leq 0}$$

Représenter le polygone des contraintes.



$$\textcircled{3} \quad x + 2y - 24 = 0$$

$$2y = -x + 24$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 12$$

$$\text{test}(0;0) : -24 \leq 0 \text{ oui}$$

$$\textcircled{4} \quad 3x + 2y - 48 = 0$$

$$2y = -3x + 48$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 24$$

$$\text{test}(0;0) : -48 \leq 0 \text{ oui}$$

$$P : -\frac{1}{2}x + 12 = -\frac{3}{2}x + 24 \quad | \cdot 2$$

$$-x + 24 = -3x + 48$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 12 + 12 = 6$$

$$\Rightarrow P(12;6)$$

Déterminer le point situé dans ce domaine qui maximise la fonction $f(x,y) = 3x + 4y$.

$$\text{On pose } f(x,y) = c \Leftrightarrow 3x + 4y = c \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{c}{4}$$

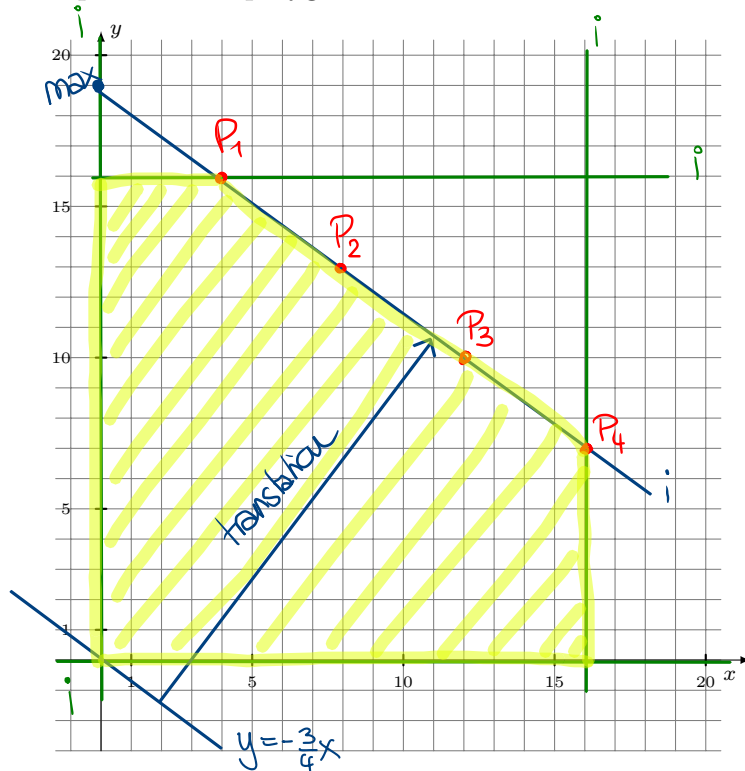
Pour maximiser f , on va maximiser c

On trace la droite $y = -\frac{3}{4}x$, et on fait une translation de cette droite passant par un point du polygone des contraintes et dont l'ordonnée à l'origine est maximale. Le point qui maximise f est $P(12;6)$ et $f(12;6) = 3 \cdot 12 + 4 \cdot 6 = 60$

e) On considère le domaine délimité par les inéquations :

$$x \geq 0, y \geq 0, x \leq 16, y \leq 16 \text{ et } 3x + 4y - 76 \leq 0$$

Représenter le polygone des contraintes. ①



$$\begin{aligned} ① \quad 3x + 4y - 76 &= 0 \\ 4y &= -3x + 76 \\ y &= -\frac{3}{4}x + 19 \\ \text{test}(0;0) : 0 + 0 - 76 &\leq 0 \\ &\text{oui} \end{aligned}$$

Déterminer les points à coordonnées entières, situés dans ce domaine qui maximisent la fonction $f(x; y) = 3x + 4y$.

$$f(x; y) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

$$P_1(4; 16) \quad P_2(8; 13) \quad P_3(12; 10) \quad P_4(16; 7)$$

même pente que la droite frontière ① déjà tracée.
Après translation, on voit que la droite d'ordonnée à l'origine maximale est cette droite ①.

Déterminer tous les points situés dans ce domaine qui maximisent la fonction.

Tous les points compris entre $P_1(4; 16)$ et $P_4(16; 7)$ sur la droite, c'est-à-dire tous les points dont la 1^{ère} coord. est comprise entre 4 et 16 et la 2^e coord se calcule avec $y = -\frac{3}{4}x + 19$.
Il y a ici une infinité de solutions.

En conclusion :

- Seuls les couples $(x; y) \in \mathbb{R}$ satisfont toutes les contraintes. De plus, la solution optimale sera toujours située sur au moins un des sommets du polygone délimitant le domaine R.
- La translation de la fonction objective permet de déterminer les coordonnées du sommet maximisant ou minimisant la fonction.