

Exercice 1.

On donne un triangle ABC par ses sommets $A(2; 7)$ et $B(-4; -3)$ et ses côtés $(AC) : 3x + 2y - 20 = 0$ et $(BC) : 2x - 5y - 7 = 0$.

a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite AB .

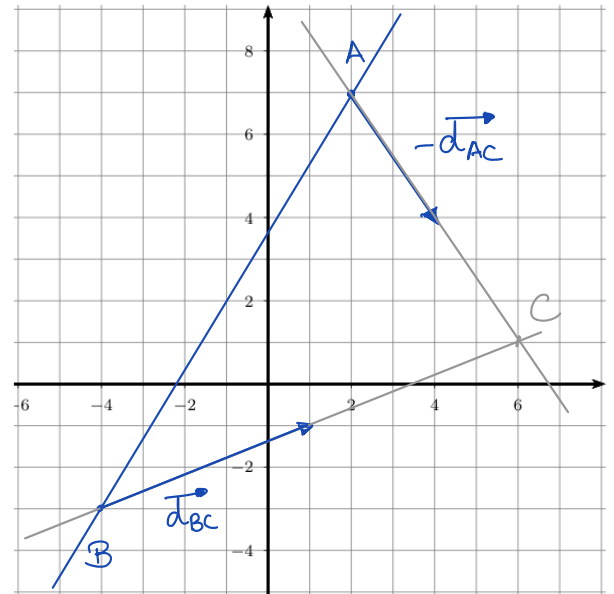
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d}_{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB) : 5x - 3y + C = 0$$

$$A(2; 7) \in (AB) \Rightarrow 5 \cdot 2 - 3 \cdot 7 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad (AB) : 5x - 3y + 11 = 0$$

$$C = 11$$

b) Donner les composantes d'un vecteur directeur de la droite AC . Même question pour la droite BC .

$$\vec{d}_{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d}_{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$



c) Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment AB .

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_{AB} : 3x + 5y + C = 0$$

$$M_{AB} \left(\frac{2-4}{2}; \frac{7-3}{2} \right) = (-1; 2) \in m_{AB} \Rightarrow -3 + 10 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{AB} : 3x + 5y - 7 = 0$$

$$C = -7$$

d) Calculer l'angle aigu entre les droites AC et BC .

$$m_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \tan(\varphi) = \left| \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}} \right| = \frac{\frac{19}{10}}{\frac{8}{5}} = \frac{19}{4}$$

$$\Leftrightarrow \varphi \approx \tan^{-1} \left(\frac{19}{4} \right) = 78,11^\circ$$

Variante : $\vec{d}_{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}_{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{|-2 \cdot 5 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{4+9} \sqrt{25+4}} = \frac{|-4|}{\sqrt{13} \sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{13} \sqrt{29}} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{13} \sqrt{29}}\right) \cong 78,11^\circ$$

e) Calculer l'aire du triangle ABC .

Pour calculer l'aire on a besoin de deux vecteurs formant le triangle par exemple $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Il faut donc déterminer les coords de C .

$$\bullet C = (AC) \cap (BC) : \begin{cases} 3x+2y = 20 \\ 2x-5y = 7 \end{cases} \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 15x+10y = 100 \\ 4x-10y = 14 \\ \hline 19x = 114 \\ x = 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 6 - 5y = 7 \Rightarrow 5 = 5y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C(6;1)$$

$$\bullet \vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

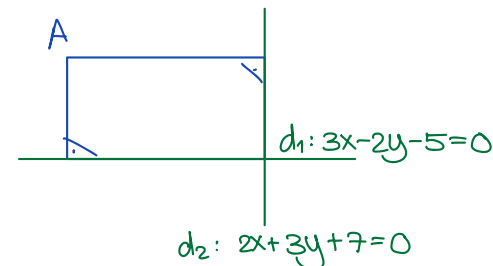
$$\bullet S = \frac{1}{2} \left| -6 \cdot (-6) - (-10) \cdot 4 \right| = \frac{1}{2} \left| 36 + 40 \right| = \frac{1}{2} \cdot 76 = \underline{38 \text{ u}^2}$$

Exercice 2.

On donne un sommet $A(-2; 1)$ d'un rectangle. Deux de ses côtés se trouvent sur les droites d'équations cartésiennes $3x - 2y - 5 = 0$ et $2x + 3y + 7 = 0$

a) Montrer que A n'appartient pas aux deux droites données.

b) Calculer l'aire de ce rectangle.



a) $A \notin d_1$ car $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - 5 = -13 \neq 0$

$A \notin d_2$ car $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 7 = 6 \neq 0$

#

b) Pour calculer l'aire de ce rectangle il suffit de calculer la distance de A à d_1 et celle de A à d_2 , puis de les multiplier.

$$S(A; d_1) = \frac{|3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-13|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \text{ u}$$

$$S(A; d_2) = \frac{|2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{13} \cdot \frac{6\sqrt{13}}{13} = \underline{6 \text{ u}^2}$$

Exercice 3.

Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice des droites $x - 2y - 2 = 0$ et $4x + 2y - 1 = 0$ passant par le point $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

$$b_{1,2} : \frac{x-2y-2}{\underbrace{\sqrt{1+4}}_{=\sqrt{5}}} = \pm \frac{4x+2y-1}{\underbrace{\sqrt{16+4}}_{\sqrt{20}=2\sqrt{5}}} \quad | \cdot 2\sqrt{5}$$

$$2(x-2y-2) = \pm (4x+2y-1) \quad \triangle \text{ ne pas oublier les } ()$$

$$\begin{array}{l} + \\ \diagup \end{array} \quad 2x-4y-4 = 4x+2y-1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+6y+3=0 : b_1$$

$$\begin{array}{l} - \\ \diagdown \end{array} \quad 2x-4y-4 = -4x-2y+1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x-2y-5=0 : b_2$$

$$A \in b_1 ? : 2 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{non}$$

$$A \in b_2 ? : 6 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{oui}$$

la bissectrice cherchée est $b_2 : 6x - 2y - 5 = 0$