

Expressions bicarrées

$$\text{Exple : } x^4 + x^2 - 2 = (x^2)^2 + x^2 - 2$$

changement de variable $y = x^2$

$$= y^2 + y - 2$$

$$\stackrel{\text{SP}}{=} (y+2)(y-1)$$

$$y = x^2 \Rightarrow (x^2+2)(x^2-1)$$

$$= (x^2+2)(x+1)(x-1)$$

Ex 2.2.5 a) $\rightarrow$ c)

$$\text{a) } x^4 - 13x^2 + 36 \stackrel{y=x^2}{=} y^2 - 13y + 36 \stackrel{\text{SP}}{=} (y-4)(y-9)$$

1 · 36
2 · 18
3 · 12
4 · 9
6 · 6

$$y = x^2 \Rightarrow (x^2-4)(x^2-9)$$

$$= \underline{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$$

$$\text{b) } a^6 + 19a^3 - 216 \stackrel{y=a^3}{=} y^2 + 19y - 216 \quad (\text{SP au } \Delta)$$

$$\Delta = 19^2 + 4 \cdot 216 = 1225$$

$$y_{1,2} = \frac{-19 \pm 35}{2} = \begin{matrix} 8 \\ -27 \end{matrix}$$

$$= (y-8)(y+27)$$

$$y = a^3 \Rightarrow (a^3-8)(a^3+27)$$

$$= \underline{(a-2)(a^2+2a+4)(a+3)(a^2-3a+9)}$$

$\Delta = 4 - 16 < 0$ $\Delta = 9 - 4 \cdot 9 < 0$

Théorème général de l'algèbre

les seuls polynômes non factorisables sont

- les polynômes de degré 1 ($ax+b$)
- les polynômes de degré 2 avec $\Delta < 0$

(ax^2+bx+c)

2.2.6

k) $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

$$= (1+x) + x^2(1+x) + x^4(1+x)$$

$$= (1+x)(1+x^2+x^4)$$

encore
factorisable
vu le thm.

GR 3 par 3

$$= (1+x+x^2) + x^3(1+x+x^2)$$

$$= (1+x+x^2)(1+x^3)$$

$$= (1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2)$$

$$= \underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta=1-4=-3<0} \underbrace{(x+1)}_{\Delta=-3<0} \underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta=-3<0} \quad (\text{pas factorisable})$$

essayons de factoriser x^4+x^2+1

$$\underline{y=x^2}$$

$$y^2+y+1$$

$$\Delta=1-4=-3<0 \quad \text{n'est pas factorisable}$$

ici le chgmt de variable ne fonctionne pas.

On utilise la complétion :

$$x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1) + x^2-2x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$$

$$\stackrel{\text{PR}}{=} [(x^2+1)+x][(x^2+1)-x]$$

$$= (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

on obtient le même résultat final

ex 2.2.3 e) $z^6 + 27 \stackrel{\text{PR}}{=} (z^2 + 3)(\underbrace{z^4 - 3z^2 + 9})$

$\xrightarrow{y=z^2} y^2 - 3y + 9$
 $\Delta = 9 - 4 \cdot 9 < 0$

complétion : $z^4 - 3z^2 + 9$

$$= (z^4 + 6z^2 + 9) - 3z^2 - 6z^2$$

$$= (z^2 + 3)^2 - 9z^2$$

PR $= [(z^2 + 3) - 3z][(z^2 + 3) + 3z] = (\underbrace{z^2 - 3z + 3})(\underbrace{z^2 + 3z + 3})$

$\Delta = 9 - 12 < 0$ $\Delta = 9 - 12 < 0$

$$\Rightarrow z^6 + 27 = (z^2 + 3)(z^2 - 3z + 3)(z^2 + 3z + 3)$$

Exercice : a) $x^4 + 2x^2 + 9$

$$= (x^4 + 6x^2 + 9) + 2x^2 - 6x^2$$

$$= (x^2 + 3)^2 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 3 + 2x)(x^2 + 3 - 2x)$$

$$= \underline{\underline{(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)}}$$

b) $x^4 + 4$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

$$= \underline{\underline{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}}$$