

Ex 2.1.1

a) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$

cercle de centre $C(5; -2)$ et $r=5$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 64$

" " $C(-2; 0)$ et $r=8$

c) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$

c'est un point $(5; -2)$ ($r=0$)

d) $x^2 + (y-5)^2 = 5$

cercle de centre $C(0; 5)$ et $r=\sqrt{5}$

e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 20 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \quad \text{cercle de centre } \underline{C(1; -2)} \text{ et } \underline{r=5}$$

f) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -14 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = -9 \quad \text{⚡} \quad \text{pas un cercle.}$$

neg.

g) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = -5 + 4 + 1$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0 \quad \text{c'est un } \underline{\text{point}} \quad \underline{(-2; 1)}$$

h) $x^2 + y^2 + x = 0$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = 0 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \text{cercle de centre } \underline{C(-\frac{1}{2}; 0)} \text{ et } \underline{r=\frac{1}{2}}$$

i) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -14 + 9 + 4$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = -1 \quad \text{⚡ (neg.)} \quad \text{ce n'est } \underline{\text{pas un cercle}}$$

j) $x^2 + y^2 + y = 0$

$$x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{cercle de centre } \underline{C(0; -\frac{1}{2})} \text{ et } \underline{r=\frac{1}{2}}$$

Ex 2.1.2

a) $C(0;0)$ et $r=3$: $x^2+y^2=9$

b) $C(2;-3)$ et $r=7$: $(x-2)^2+(y+3)^2=49$

c) $C(6;-8)$ et passe par $O(0;0)$: $\gamma: (x-6)^2+(y+8)^2=r^2$

1^{re} méthode: $O \in \gamma \Rightarrow (0-6)^2+(0+8)^2=36+64=100=r^2$
($r=10$)

$\Rightarrow \gamma: \underline{(x-6)^2+(y+8)^2=100}$

2^{de} méthode: $r = \|\vec{OC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \dots$

d) $C(-1;2)$ et passe par $A(2;6)$: $\gamma: (x+1)^2+(y-2)^2=r^2$

1^{re} méthode: $A \in \gamma \Rightarrow (2+1)^2+(6-2)^2=9+16=25=r^2$ ($r=5$)

$\Rightarrow \gamma: \underline{(x+1)^2+(y-2)^2=25}$

2^{de} méthode: $r = \|\vec{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \dots$

e) $A(3;2), B(-1;6)$ diamètre :

centre : milieu de AB : $M_{AB}\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (-1;4)$

$\Rightarrow \gamma: (x-1)^2+(y-4)^2=r^2$

1^{re} méthode: $A \in \gamma \Rightarrow (3-1)^2+(2-4)^2=4+4=8=r^2$ ($r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$)

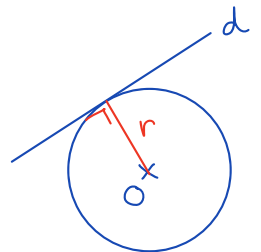
$\Rightarrow \gamma: \underline{(x-1)^2+(y-4)^2=8}$

(2^{de} méthode: $r = \frac{\|\vec{AB}\|}{2} = \|\vec{AM}_{AB}\| = \dots$)

f) $C(0;0)$ et tgt à $d: 3x-4y+20=0$

$r = \delta(C; d) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$

$\Rightarrow \gamma: \underline{x^2+y^2=16}$



g) $C(1;-1)$ et tgt à $d: 5x-12y+9=0$

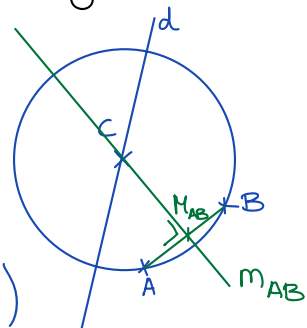
$r = \delta(C; d) = \frac{|5 \cdot 1 - 12 \cdot (-1) + 9|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow \gamma: \underline{(x-1)^2+(y+1)^2=4}$

h) passe par $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et $C \in d: 3x-y-2=0$

le centre se trouve sur
la médiatrice de AB

$$* m_{AB}: \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}}$$

(vecteur normal de m_{AB})
car $\perp$ à AB



$$\Rightarrow m_{AB}: -2x+y+C=0 \text{ et}$$

$$M_{AB}\left(\frac{3+(-1)}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = (1;2) \in m_{AB} \Rightarrow -2 \cdot 1 + 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \underline{m_{AB}: -2x+y=0}$$

$$* C \in d \cap m_{AB} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=2 & | 1 \\ -2x+y=0 & | 1 \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 - y = 2 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow C(2;4)$$

$$\Rightarrow \gamma: (x-2)^2 + (y-4)^2 = r^2 \text{ et}$$

$$A \in \gamma \Rightarrow (3-2)^2 + (1-4)^2 = 1+9 = 10 \Rightarrow \underline{\gamma: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10}$$

($r = \sqrt{10}$)

i) passe par $A(1;1)$ $B(1;-1)$ et $C(2;0)$

$$* m_{AB}: \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}}$$

(vecteur vertical)

$$\Rightarrow y+C=0$$

(droite horizontale)

$$M_{AB}\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1;0) \in m_{AB} \Rightarrow 0+C=0 \Leftrightarrow C=0$$

$$\Rightarrow \underline{m_{AB}: y=0} \text{ (c'est l'axe } Ox)$$

$$* m_{AC}: \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AC}} \Rightarrow x-y+C=0$$

$$M_{AC}\left(\frac{1+2}{2}; \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \in m_{AC} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \underline{m_{AC}: x-y-1=0}$$

$$* K = m_{AB} \cap m_{AC} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow K(1;0)$$

$$\Rightarrow \gamma: (x-1)^2 + y^2 = r^2$$

$$A \in \gamma \Rightarrow (1-1)^2 + 1^2 = 0+1 = 1 = r^2 \Rightarrow \underline{\gamma: (x-1)^2 + y^2 = 1}$$

Ex 2.1.3

a) $y = 2x - 3$
 $2x - y - 3 = 0$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 3x + 2y &= 3 \\(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (y^2 + 2y + 1) &= 3 + \frac{9}{4} + 1 \\(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 &= \frac{25}{4} \\ \Rightarrow C(\frac{3}{2}; -1) \text{ et } r &= \frac{5}{2} u\end{aligned}$$

$$S(C; d) = \frac{|2 \cdot \frac{3}{2} + 1 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cong 0,45 < \frac{5}{2} = 2,5$$

$\Rightarrow$ sécants

Question suppl. : pls d'n

(1) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{substitution}$

$$\Rightarrow x^2 + (2x - 3)^2 - 3x + 2(2x - 3) = 3$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 3x + 4x - 6 = 3$$

$$5x^2 - 11x = 0$$

$$x(5x - 11) = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 & \xRightarrow{(1)} y = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \Rightarrow \underline{I(0; -3)} \\ \frac{11}{5} & \xRightarrow{(1)} y = 2 \cdot \frac{11}{5} - 3 = \frac{7}{5} \Rightarrow \underline{J(\frac{11}{5}; \frac{7}{5})} \end{cases}$$

b) $x - 2y - 1 = 0$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$$

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = -12 + 16 + 1$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow C(4; -1) \text{ et } r = \sqrt{5} u$$

$$S(C; d) = \frac{|4 - 2(-1) - 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \underline{\text{tangents}}$$

Question suppl. : pls d'N

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y + 1 \quad \swarrow \text{substitution} \\ (2) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2y+1)^2 + y^2 - 8(2y+1) + 2y + 12 &= 0 \\ 4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 16y - 8 + 2y + 12 &= 0 \\ 5y^2 - 10y + 5 &= 0 \\ y^2 - 2y + 1 &= 0 \\ (y-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \underline{T(3;1)}$$

$$\begin{aligned} c) \quad y &= x + 10 & x^2 + y^2 &= 1 \Rightarrow C(0;0) = 0 \text{ et } r = 1 \text{ u} \\ x - y + 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$S(C; d) = \frac{|0 - 0 + 10|}{\sqrt{1+1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 > 1$$

$\Rightarrow$ disjoints

Ex 2.1.4

$$\gamma_1: x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$$

$$x^2 - 16x + 64 + y^2 - 20y + 100 = -115 + 64 + 100$$

$$(x-8)^2 + (y-10)^2 = 49$$

$$\Rightarrow C_1(8; 10) \text{ et } r_1 = 7$$

$$\gamma_2: x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = -5 + 16 + 25$$

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 36$$

$$C_2(-4; 5) \text{ et } r_2 = 6$$

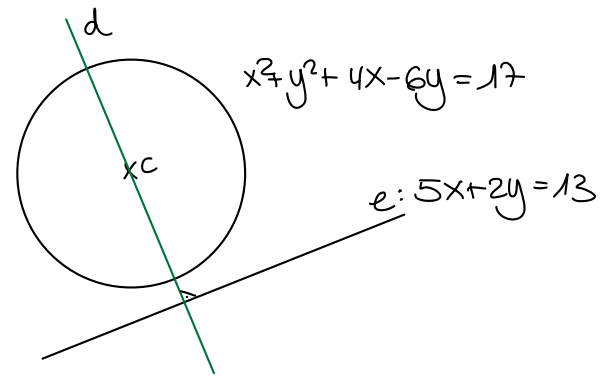
$$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \sqrt{144 + 25} = 13 = 7 + 6 = r_1 + r_2$$

$\Rightarrow$ les cercles sont tangents extérieurement.

Ex 2.1.5

$$\bullet (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 17 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 30 \Rightarrow C(-2; 3) \text{ et } r = \sqrt{30}$$



• le diamètre est $\perp$ à e et passe par C

$$\Rightarrow d: 2x - 5y + c = 0$$

$$C \in d: -4 - 15 + c = 0 \\ c = 19$$

$$\Rightarrow \underline{d: 2x - 5y + 19 = 0}$$

Ex 2.1.6

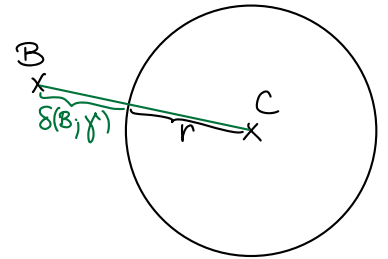
$$\bullet x^2 - 26x + 169 + y^2 + 30y + 225 = -313 + 169 + 225$$

$$(x-13)^2 + (y+15)^2 = 81$$

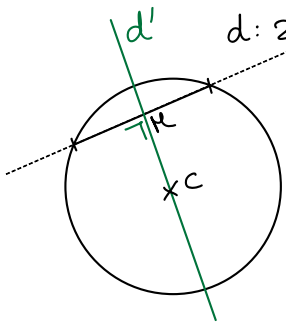
$$\Rightarrow C(13; -15) \text{ et } r = 9$$

$$\bullet \text{ distance de } B \text{ à } C: \vec{BC} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$$

$$\bullet \text{ distance de } B \text{ à } \gamma: \|\vec{BC}\| - r = 26 - 9 = \underline{17u}$$



Ex 2.1.7



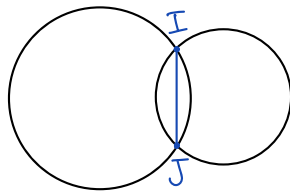
$$d: 2x + y - 13 = 0$$

* Comme la droite cherchée passe par le milieu de la corde et par le centre du cercle (diamètre), cette droite est la médiatrice de la corde, donc perpendiculaire à $d \Rightarrow d': x - 2y + c = 0$

$$\bullet C(2; -1) \in d' \Rightarrow 2 - 2 \cdot (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

$$\Rightarrow \underline{d': x - 2y - 4 = 0}$$

Ex 2.1.8



On commence par chercher les points d'intersection des deux cercles :

$$\begin{array}{l} - \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0 \end{cases} \\ \hline -16x - 12y + 40 = 0 \quad | \div (-4) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

substit.

$$\Rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}\right)^2 - 10x - 10\left(-\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{80}{9}x + \frac{100}{9} - 10x + \frac{40}{3}x - \frac{100}{3} = 0 \quad | \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 16x^2 - 80x + 100 - 90x + 120x - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 50x - 200 = 0 \quad | \div 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_{1,2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -\frac{4}{3} \cdot 4 + \frac{10}{3} = -2 \Rightarrow I(4; -2) \\ y = -\frac{4}{3} \cdot (-2) + \frac{10}{3} = 6 \Rightarrow J(-2; 6) \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{IJ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{IJ}\| = \sqrt{36 + 64} = \underline{10 \text{ u}}$$

$$\left(25y^2 - 100y - 300 = 0 \right)$$

Ex 2.1.9

$$d: 4x-5y-3=0 \quad t_1: 2x-3y-10=0 \quad t_2: 3x-2y+5=0$$

* cercle lgt à t_1 et t_2 donc centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{2x-3y-10}{\underbrace{\sqrt{2^2+(-3)^2}}_{\sqrt{13}}} = \pm \frac{3x-2y+5}{\underbrace{\sqrt{3^2+(-2)^2}}_{\sqrt{13}}} \quad | \cdot \sqrt{13}$$

$$2x-3y-10 = \pm (3x-2y+5)$$

$$\oplus \quad 2x-3y-10 = 3x-2y+5$$

$$-x-y-15=0$$

$$b_1: \underline{x+y+15=0}$$

$$\ominus \quad 2x-3y-10 = -3x+2y-5$$

$$5x-5y-5=0$$

$$b_2: \underline{x-y-1=0}$$

$$* C_1 = d \cap b_1 : \begin{cases} 4x-5y=3 \\ x+y=-15 \end{cases} \begin{array}{c} | 1 \\ 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 4x-5y=3 \\ 5x+5y=-75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9x = -72 \\ x = -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2^e) \\ \Rightarrow -8+y=-15 \\ y = -7 \end{array} \Rightarrow \underline{C_1(-8; -7)}$$

$$r_1 = \delta(C_1; t_1) = \frac{|2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-7) + 10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{13}}{13}}}$$

$$\Rightarrow \underline{r_1: (x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}}$$

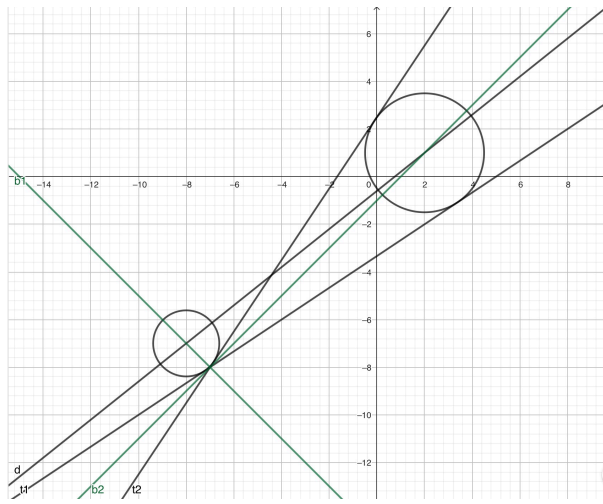
$$* C_2 = d \cap b_2 : \begin{cases} 4x-5y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \begin{array}{c} | 1 \\ -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 4x-5y=3 \\ -5x+5y=-5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x = -2 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2^e) \\ \Rightarrow 2-y=1 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow \underline{C_2(2; 1)}$$

$$r_2 = \delta(C_2; t_1) = \frac{|2 \cdot (2) - 3 \cdot (1) + 10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}} = \underline{\underline{\frac{9\sqrt{13}}{13}}}$$

$$\Rightarrow \underline{r: (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}}$$



Ex 2.1.10

$$d: 2x + y = 0 \quad t_1: 4x - 3y + 10 = 0 \quad t_2: 4x - 3y - 30 = 0$$

* cercle rgt à t_1 et t_2 donc centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{4x - 3y + 10}{\underbrace{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}_5} = \pm \frac{4x - 3y - 30}{\underbrace{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}_5} \quad | \cdot 5$$

$$4x - 3y + 10 = \pm (4x - 3y - 30)$$

$$\oplus: 4x - 3y + 10 = 4x - 3y - 30$$

$$40 = 0 \quad \text{!}$$

$$\ominus: 4x - 3y + 10 = -4x + 3y + 30$$

$$8x - 6y - 20 = 0$$

$$b_2: \underline{4x - 3y - 10 = 0}$$

les droites t_1 et t_2 étant parallèles il n'y a qu'une seule bissectrice, // à t_1 et t_2
et qui se trouve au milieu des deux dîtes donc $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$ (a et b identiques)
car //

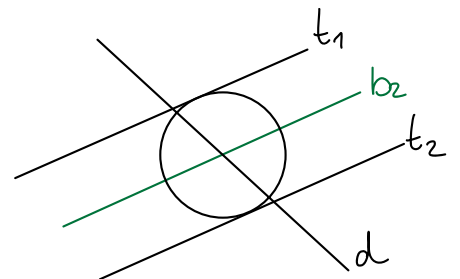
$$* C = d \cap b_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} | 3 \\ | 1 \end{matrix} \Rightarrow + \begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 10x & = & 10 \\ x & = & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{1}^{\text{e}} \text{eq.} \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad 2 + y = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

$$\Rightarrow \underline{C(1; -2)}$$

$$* r = \delta(C; t_1) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{20}{5} = \underline{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16}$$



Ex 2.1.12

* $T(1;2) \in t_1$ car $7 \cdot 1 - 2 - 5 = 0$

* cercle tgt à t_1 et t_2 donc

centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{7x-y-5}{\sqrt{49+1}} = \pm \frac{x+y+13}{\sqrt{1+1}}$$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

$$\frac{7x-y-5}{5\sqrt{2}} = \pm \frac{5(x+y+13)}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow 7x-y-5 = \pm 5(x+y+13)$$

$$\oplus \quad 7x-y-5 = 5x+5y+65$$

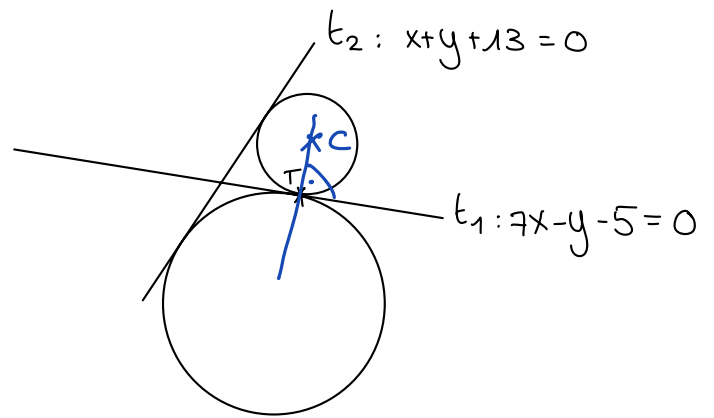
$$2x-6y-70=0$$

$$\underline{b_1: x-3y-35=0}$$

$$\ominus \quad 7x-y-5 = -5x-5y-65$$

$$12x+4y+60=0$$

$$\underline{b_2: 3x+y+15=0}$$



* Comme T est le point de contact (ou de tangence) et que $T \in t_1$, le centre se trouve sur une droite p perpendiculaire à t_1 (la tangente et la droite passant par le centre et le point de tangence sont lrs perpendiculaires.)

$$\Rightarrow p: x+7y+C=0 \text{ et}$$

$$T \in p \Rightarrow 1+7 \cdot 2+C=0 \Leftrightarrow C=-15 \Rightarrow \underline{p: x+7y-15=0}$$

$$* C_1 = p \cap b_1: \begin{cases} x+7y=15 \\ x-3y=35 \end{cases} \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ \hline 10y = -20 \end{array} \Leftrightarrow y = -2$$

1^{re} eq.

$$\Rightarrow x-14=15 \Leftrightarrow x=29 \Rightarrow C_1(29; -2)$$

$$* r_1 = \delta(C_1; t_2) = \frac{|29-2+13|}{\sqrt{1+1}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \delta(C_1; T) = \|\vec{C_1T}\|$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma_1: (x-29)^2 + (y+2)^2 = 800}$$

$$* C_2 = p \cap b_2 : \begin{cases} x+7y=15 & | \cdot 3 \\ 3x+y=-15 & | \cdot -1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 3x+21y=45 \\ -3x-y=15 \\ \hline 20y=60 \end{array} \Leftrightarrow y=3$$

$\xrightarrow{\text{rés.}}$

$$\Rightarrow x+21=15 \Leftrightarrow x=-6 \Rightarrow C(-6; 3)$$

$$* r_2 = \delta(C_2; t_2) = \frac{|-6+3+13|}{\sqrt{1+1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma_1: (x+6)^2 + (y-3)^2 = 50}$$

Ex 2.1.14

$$d_1: 4x - 3y - 10 = 0$$

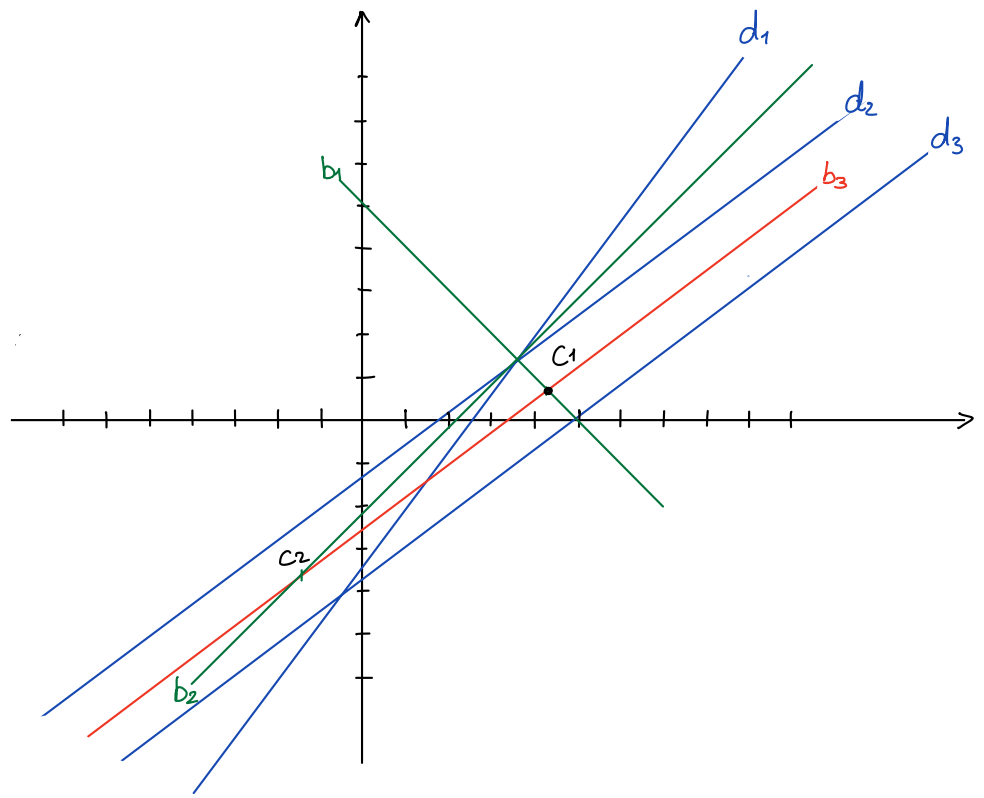
$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$

$$d_2: 3x - 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$d_3: 3x - 4y - 15 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$$



On cherche un cercle tangent à trois droites, le centre est donc à l'intersection des bissectrices.

$$\begin{aligned} \text{* bissectrices de } d_1 \text{ et } d_2 : \quad & \frac{4x - 3y - 10}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \pm \frac{3x - 4y - 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \quad | \cdot 5 \\ & 4x - 3y - 10 = \pm (3x - 4y - 5) \end{aligned}$$

$$\oplus : 4x - 3y - 10 = 3x - 4y - 5$$

$$b_1: x + y - 5 = 0$$

$$\ominus : 4x - 3y - 10 = -3x + 4y + 5$$

$$b_2: 7x - 7y - 15 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{* bissectrices de } d_2 \text{ et } d_3 : \quad & \frac{3x - 4y - 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{3x - 4y - 15}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \quad | \cdot 5 \\ & 3x - 4y - 5 = \pm (3x - 4y - 15) \end{aligned}$$

$$\oplus : 3x - 4y - 5 = 3x - 4y - 15$$

$$10 = 0 \quad \text{!}$$

$$\ominus : 3x - 4y - 5 = -3x + 4y + 15$$

$$6x - 8y - 20 = 0$$

$$b_3: 3x - 4y - 10 = 0$$

les droites d_2 et d_3 étant parallèles il n'y a qu'une seule bissectrice // à d_2 et d_3 et qui se trouve au milieu des deux dites donc $c = \frac{c_2 + c_3}{2}$ (a et b identiques)
car //

Il y a deux cercles et les centres se trouvent à l'intersection de $b_1 \cap b_3$ et de $b_2 \cap b_3$ (comme on le voit sur le graphique)

$$* \quad b_1 \cap b_3 : \begin{cases} x+y-5=0 & | 4 \\ 3x-4y-10=0 & | 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} 4x+4y-20=0 \\ 3x-4y-10=0 \\ \hline 7x-30=0 \\ x=\frac{30}{7} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{7} + y - 5 = 0 \\ y = 5 - \frac{30}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow C_1\left(\frac{30}{7}; \frac{5}{7}\right)$$

$$r_1 = \delta(C_1; d_1) = \frac{|4 \cdot \frac{30}{7} - 3 \cdot \frac{5}{7} - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{f_1: \left(x - \frac{30}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = 1}$$

$$* \quad b_2 \cap b_3 : \begin{cases} 7x-7y-15=0 & | -3 \\ 3x-4y-10=0 & | 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} -21x+21y+45=0 \\ 21x-28y-70=0 \\ \hline -7y-25=0 \\ y=-\frac{25}{7} \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x - 4 \cdot \left(-\frac{25}{7}\right) - 10 = 0$$

$$3x = -\frac{100}{7} + 10 = -\frac{30}{7}$$

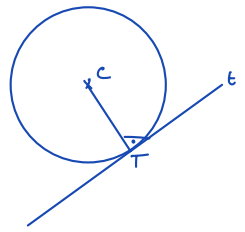
$$x = -\frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow C_2\left(-\frac{10}{7}; -\frac{25}{7}\right)$$

$$r_2 = \delta(C_2; d_1) = \frac{|4 \cdot \left(-\frac{10}{7}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{25}{7}\right) - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{f_2: \left(x + \frac{10}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{7}\right)^2 = 1}$$

Ex 2.1.16



a) $T(-1;2)$ $\gamma: x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow C(0;0) = 0$

$T \in \gamma: (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: -x + 2y + c = 0$

$T \in t \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -5 \Rightarrow \underline{t: -x + 2y - 5 = 0}$
 $\Leftrightarrow \underline{t: x - 2y + 5 = 0}$

b) $T(-5;7)$ $\gamma: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25 \Rightarrow C(-2;3)$

$T \in \gamma: (-5+2)^2 + (7-3)^2 = 9 + 16 = 25 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} -5+2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: 3x - 4y + c = 0$

$T \in t \Rightarrow 3(-5) - 4 \cdot 7 + c = 0 \Leftrightarrow c = 43 \Rightarrow \underline{t: 3x - 4y + 43 = 0}$

c) $T(0;0)$ $\gamma: x^2 + y^2 = 3x - 7y$

$x - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 7y + \frac{49}{4} = \frac{9}{4} + \frac{49}{4}$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 14 \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

$T \in \gamma: 0 + 0 = 0 - 0 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{2} \\ 0 + \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: 3x - 7y + c = 0$

$T \in t \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \underline{t: 3x - 7y = 0}$

d) $T(-1;2)$ $\gamma: x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 19 + 1 + 9$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 29 \Rightarrow C(1;-3)$

$T \in \gamma: 1 + 4 + 2 + 12 = 19 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: 2x - 5y + c = 0$

$T \in t \Rightarrow -2 - 10 + c = 0 \Leftrightarrow c = 12 \Rightarrow \underline{t: 2x - 5y + 12 = 0}$

2.1.17 Calculer la valeur de l'angle¹ aigu formé par la droite $3x - y = 1$ et le cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

$C(2;0)$ et $r=\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad d \cap \gamma : y = 3x - 1 &\Rightarrow (x - 2)^2 + (3x - 1)^2 = 5 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5 \Rightarrow 10x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 10x(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 2 \Rightarrow \underline{T_1(0; -1)}, \underline{T_2(1; 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{CT_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow t_1: 2x + y + c = 0 \\ T_1 \in t_1: 0 - 1 + c = 0 &\Leftrightarrow c = 1 \\ &\Rightarrow \underline{t_1: 2x + y + 1 = 0} \\ &\quad (t_2: \underline{x - 2y + 3 = 0}) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad m_d = 3 \text{ et } m_{t_1} = -2 \Rightarrow \tan(\alpha) = \left| \frac{-2 - 3}{1 - 6} \right| = 1 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 45^\circ}$$

2.1.18 Calculer l'angle² sous lequel se coupent les cercles $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ et $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \gamma_1: x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0 \\ \gamma_2: x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 &= 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{pts d'intersection : } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right. \\ \hline -2x - 6y - 4 = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -3y - 2$$

on substitue
dans γ_1

$$\Rightarrow (-3y - 2)^2 + y^2 - 6(-3y - 2) - 2y + 2 = 0$$

$$9y^2 + 12y + 4 + y^2 + 18y + 12 - 2y + 2 = 0$$

$$10y^2 + 28y + 18 = 0$$

$$5y^2 + 14y + 9 = 0$$

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 16$$

$$y_{1,2} = \frac{-14 \pm 4}{10} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -3(-1) - 2 = 1 \Rightarrow \underline{A(1; -1)}$$

$$\Rightarrow x = -3\left(-\frac{9}{5}\right) - 2 = \frac{17}{5} \Rightarrow \underline{B\left(\frac{17}{5}; -\frac{9}{5}\right)}$$

- t_1 tangente à p_1 en A :

$$\begin{aligned} \vec{AC}_1 &= \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \vec{n}_{t_1} \Rightarrow t_1: x+y+c=0 \\ A \in t_1: 1-1+c &= 0 \Leftrightarrow c=0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{AC}_1 &= \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \vec{n}_{t_1} \Rightarrow t_1: x+y+c=0} \right\} \Rightarrow t_1: x+y=0 \\ &\text{et } m_1 = -\frac{1}{1} = \underline{-1}$$

- t_2 tangente à p_2 en A :

$$\begin{aligned} \vec{AC}_2 &= \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{t_2} \Rightarrow t_2: x-y+c=0 \\ A \in t_2: 1+1+c &= 0 \Leftrightarrow c=-2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{AC}_2 &= \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{t_2} \Rightarrow t_2: x-y+c=0} \right\} \Rightarrow t_2: x-y-2=0 \\ &\text{et } m_2 = -\frac{1}{-1} = \underline{1}$$

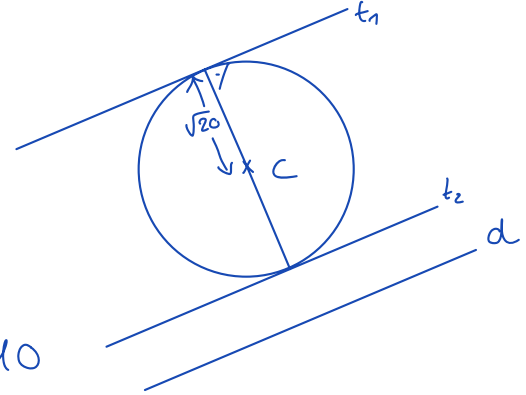
- $\tan(\varphi) = \left| \frac{1-(-1)}{\underbrace{1+(-1) \cdot 1}_{=0}} \right| \Rightarrow$ l'angle vaut 90° , en effet $m_1 \cdot m_2 = 1 \cdot (-1) = -1$
 $\Leftrightarrow t_1 \perp t_2$

Rem: dans cette deuxième partie d'ex. on n'est pas obligé de déterminer les équations des tangentes. Avec les vecteurs normaux, on peut utiliser la formule :

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2+1^2} \sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

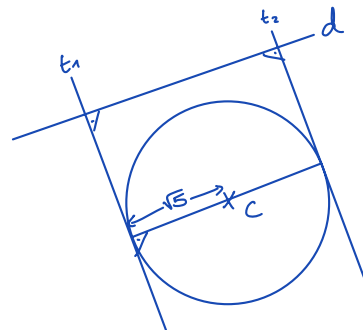
2.1.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$, de direction donnée par la droite $2x + y = 7$. $\Leftrightarrow y = -2x + 7$

- $\gamma: x^2 + 10x + y^2 - 2y = -6$
 $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 25 + 1$
 $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20 \Rightarrow C(-5; 1) \text{ et } r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- $d: 2x + y - 7 = 0$
Comme $t \parallel d \Rightarrow t: 2x + y + c = 0$
et $S(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|2(-5) + 1 + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{20}$
 $\Leftrightarrow |-9 + c| = \sqrt{100} = 10$
 $\Leftrightarrow -9 + c = \pm 10$
 $\Leftrightarrow c = \begin{cases} 10 + 9 = 19 & \Rightarrow t_1: 2x + y + 19 = 0 \\ -10 + 9 = -1 & \Rightarrow t_2: 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$



2.1.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2y + 345$.

- $\gamma: x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4$
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Rightarrow C(1; -2) \text{ et } r = \sqrt{5}$
- $d: x - 2y - 345 = 0$
Comme $t \perp d \Rightarrow t: 2x + y + c = 0$
et $S(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + (-2) + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |c| = 5 \Rightarrow c = \pm 5$
 $\Rightarrow \begin{cases} t_1: 2x + y + 5 = 0 \\ t_2: 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$



Ex 2.1.21

$$\gamma: x^2 + y^2 = 19 - 2x \quad A(1; 6)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (x^2 + 2x + 1) + y^2 &= 19 + 1 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 20 \quad \Rightarrow \quad C(-1; 0) \text{ et } r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

A est extérieur au cercle :

$$\|\vec{CA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{40} > \sqrt{20} = r \quad \checkmark$$

$$\bullet \quad 1) \quad t: y = mx + h \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t: mx - y + h = 0}$$

$$2) \quad A(1; 6) \in t \Rightarrow m - 6 + h = 0 \Leftrightarrow h = 6 - m$$

substitution

$$\Rightarrow \underline{t: mx - y + 6 - m = 0} \quad (*)$$

$$3) \quad \delta(C; t) = \sqrt{20} \Leftrightarrow \frac{|-m - 0 + 6 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \frac{|6 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{20}$$

$$\Leftrightarrow |6 - 2m| = \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1} \quad | \quad ()^2$$

$$(*) \Leftrightarrow (6 - 2m)^2 = 20(m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 36 - 24m + 4m^2 = 20m^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 24m - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \Delta = 25$$

$$\Leftrightarrow \underline{m_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}} = \begin{cases} \underline{\frac{1}{2}} \\ \underline{-2} \end{cases} \begin{aligned} &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} t_1: \frac{1}{2}x - y + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow \underline{t_1: x - 2y + 11 = 0} \\ &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} t_2: -2x - y + 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{t_2: 2x + y - 8 = 0} \end{aligned}$$

Avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ avec $A(e_1, e_2) = A(1; 6)$

$$6 - 0 = m \underbrace{(1 - (-1))}_2 \pm \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1}$$

$$6 - 2m = \pm \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1} \quad | \quad ()^2$$

idem plus haut

⊗

⋮

$$\Leftrightarrow \underline{m_{1,2}} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \underline{\frac{1}{2}} \\ \underline{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_1: y = \frac{1}{2}x + h \quad \text{et} \quad A(1; 6) \in t_1 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} + h \Leftrightarrow h = \frac{11}{2}$$

idem plus haut

$$\Rightarrow t_2: y = -2x + h \quad \text{et} \quad A(1; 6) \in t_2 \Rightarrow 6 = -2 + h \Leftrightarrow h = 8$$

idem plus haut

Ex 2.1.22

$$\gamma: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$$

$$A(6;5)$$

$$\bullet (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 20 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow C(1; -2) \text{ et } r=5$$

• A est extérieur au cercle :

$$\|\vec{CA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{35+49} = \sqrt{84} \cong 8, \dots > 5 = r \quad \checkmark$$

• avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ avec $A(e_1; e_2) = A(6; 5)$

$$5 + 2 = m(6 - 1) \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 7 - 5m = \pm 5\sqrt{m^2 + 1} \quad | \quad ()^2$$

$$\Leftrightarrow 49 - 70m + 25m^2 = 25(m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 24 = 70m$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$$

$$\Rightarrow t_1: y = \frac{12}{35}x + h \text{ et } A(6; 5) \in t \Rightarrow 5 = \frac{12}{35} \cdot 6 + h \Leftrightarrow h = \frac{103}{35}$$

$$\Rightarrow t_1: \frac{12}{35}x - y + \frac{103}{35} = 0 \Leftrightarrow \underline{t_1: 12x - 35y + 103 = 0}$$

La 2^e tangente est verticale ! $\Rightarrow \underline{t_2: X = 6}$ car passe par $A(6; 5)$

Rem: Il y a toujours 2 tgtes à un cercle passant par 1 pt. ext.
lorsqu'on ne trouve qu'une valeur pour m , l'autre tangente est
verticale ($m \rightarrow \infty$) d'équation $x = e_1$ avec $E(e_1; e_2)$

ou sans formule :

• 1) $t: y = mx + h \Leftrightarrow \underline{t: mx - y + h = 0}$

2) $A(6, 5) \in t \Rightarrow 6m - 5 + h = 0 \Leftrightarrow h = 5 - 6m$

substitution

$\Rightarrow \underline{t: mx - y + 5 - 6m = 0}$

3) $S(C; t) = \sqrt{20} \Leftrightarrow \frac{|m + 2 + 5 - 6m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|7 - 5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5$

$\Leftrightarrow |7 - 5m| = 5\sqrt{m^2 + 1} \quad |()^2$

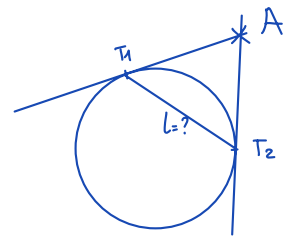
$\Leftrightarrow (7 - 5m)^2 = 25(m^2 + 1)$

idem plus haut

⋮

Ex 2.1.24

$A(4; -4)$ et $\gamma: x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5$



• $\gamma: x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = -5 + 9 + 1$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5 \Rightarrow C(3; -1) \text{ et } r = \sqrt{5}$

• $\|\vec{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} > \sqrt{5} \Rightarrow A \text{ est ext. au cercle}$

• On cherche l'équation des tangentes à γ en A (sans formule)

1) $t: y = mx + h$

$A \in t \Rightarrow -4 = 4m + h \Leftrightarrow h = -4 - 4m \Rightarrow t: y = mx - 4 - 4m$

$\Leftrightarrow \underline{mx - y - 4 - 4m = 0}$

2) $S(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|m \cdot 3 - (-1) - 4 - 4m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \frac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |-m-3| = \sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \quad |()|^2$

$\Leftrightarrow (-m-3)^2 = 5(m^2+1)$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 = 5m^2 + 5$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0 \quad \Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$

$\Leftrightarrow m_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{t_1: 2x - y - 12 = 0}$
 $\Rightarrow \underline{t_2: -\frac{1}{2}x - y - 2 = 0} \Leftrightarrow \underline{x + 2y + 4 = 0}$

• $\{T_1\} = t_1 \cap \gamma: \begin{cases} 2x - y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 12 \quad \swarrow \text{on substitue}$

$$\Rightarrow x^2 + (2x-12)^2 = 6x - 2(2x-12) - 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 48x + 144 = 6x - 4x + 24 - 5$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 50x + 125 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=2.5-12=-2 \Rightarrow \underline{T_1(5;-2)}$$

$$\bullet \{T_2\} = t_2 \cap \gamma: \begin{cases} x+2y+4=0 \\ x^2+y^2=6x-2y-5 \end{cases} \Rightarrow x=-2y-4 \quad \downarrow \text{on substitute}$$

$$\Rightarrow (-2y-4)^2 + y^2 = 6(-2y-4) - 2y - 5$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 16y + 16 + y^2 = -12y - 24 - 2y - 5$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + 30y + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow y=-3 \Rightarrow x=-2 \cdot (-3) - 4 = 2 \Rightarrow \underline{T_2(2;-3)}$$

$$\bullet l = \|\vec{u}_{T_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+1} = \underline{\underline{\sqrt{10} u}}$$