1MR - Révision - Division euclidienne - Corrigé

Ex 1

$$\begin{array}{r|l} 2X^3+3X^2-12X+12 & 2X^2+7X-6 \\ +(-2X^3\mp 7X^2+6X) & \\ \hline -4X^2-6X+12 & X-2 \\ +(+4X^2+14X\mp 12) & \\ \hline 8X & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 2X^3+3X^2-12X+12 = (2X^2+7X-6)(X-2)+8X$$

Ex 2

Le reste de la division est $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{8} - \frac{7}{2} - 3 = -\frac{51}{8}$

Rem : on peut aussi calculer le reste en effectuant la division mais c'est plus long !

Ex 3

Si $(x+2)(x-3)$ divise $P(x) = ax^3-5x^2-9x+b$ alors

$(x+2)$ divise $P(x) \Leftrightarrow$ le reste de la division de $P(x)$ par $x+2$ est nul $\Leftrightarrow P(-2)=0$

de même pour $(x-3)$: " " " $x-3$ " $\Leftrightarrow P(3)=0$.

$P(-2) = a\cdot(-2)^3-5\cdot(-2)^2-9\cdot(-2)+b = 0 \Leftrightarrow -8a-20+18+b=0 \Leftrightarrow -8a+b=2$

$P(3) = 27a-45-27+b = 0 \Leftrightarrow 27a+b=72$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -8a+b=2 \\ 27a+b=72 \end{array}\right. \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -8a+b=2 \\ -35a=-70 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=2+8\cdot 2=18 \end{array}\right.$$

Ex 4

Comme $P(3) = 0$, $P(x)$ est divisible par $x-3$.

On effectue alors la division avec le schéma de Horner :

	6	−7	−37	8	12
3		18	33	−12	−12
	6	11	−4	−4	0
−2		−12	2	4	
	6	−1	−2	0	

$\Rightarrow P(x) = (x-3)\underbrace{(6x^3+11x^2-4x-4)}_{q(x)}$

$q(1) = 6+11-4-4 \neq 0$

$q(-2) = -48+44+8-4 = 0$ ✓

On obtient $P(x) = (x-3)(x+2)(6x^2-x-2)$

$\Delta = 1+4\cdot 6\cdot 2 = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1\pm 7}{12} = \begin{cases} 2/3 \\ -1/2 \end{cases}$

$\Rightarrow P(x) = 6(x-3)(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-3)(x+2)(3x-2)(2x+1)$

Ex 5

$$2x^4 - 6x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(\underbrace{x^3-3x-2}_{p(x)}) = 0$$

On cherche un diviseur pour $p(x)$:

$p(1) = 1-3-2 \neq 0$

$p(-1) = -1+3-2 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ $p(x)$ est divisible par $x+1$

On effectue alors la division avec le schéma de Horner :

	1	0	−3	−2
−1		−1	1	2
	1	−1	−2	0

$\Rightarrow p(x) = (x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x-2)(x+1)$

$= (x+1)^2(x-2)$

L'équation est donc $2x(x+1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow S = \{-1; 0; 2\}$

(0, −1, 2)

Ex 6

On cherche un polynôme $P(x)$ de degré 4 tel que

- sa valeur numérique en 0 est égale à 0 ;
- il est divisible par $x - 2$;
- il admet 3 pour zéro ;
- $P(1) = 16$;
- le reste de sa division par $x + 1$ est égal à -24.

$\Rightarrow P(x) = x(x-2)(x-3)(ax+b)$

$P(1) = 16 \Leftrightarrow 1\cdot(-1)\cdot(-2)(a+b) = 16 \Leftrightarrow 2(a+b) = 16 \Leftrightarrow a+b = 8$

$P(-1) = -24 \Leftrightarrow -1\cdot(-3)(-4)(-a+b) = -24 \Leftrightarrow -12(-a+b) = -24 \Leftrightarrow -a+b = 2$

$$\begin{cases} a+b=8 \\ -a+b=2 \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 10 \\ 2a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x) = x(x-2)(x-3)(3x+5)$