

3.2 Position relative de deux cercles

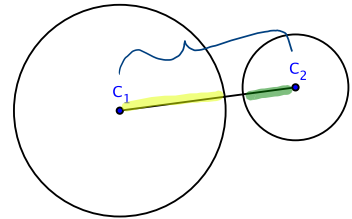
Soit les cercles γ_1 de centre C_1 et de rayon r_1 et γ_2 de centre C_2 et de rayon r_2 avec $r_1 > r_2$.

On a les cinq situations suivantes :

1. Les cercles sont **disjoints extérieurement**

$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| > r_1 + r_2$$

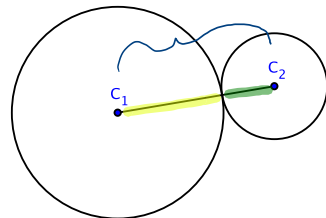
aucun point d'intersection



2. Les cercles sont **tangents extérieurement**

$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = r_1 + r_2$$

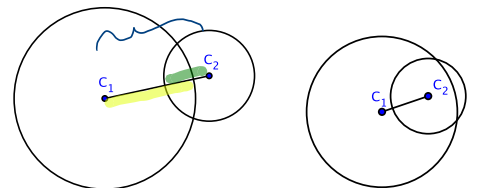
1 point d'intersection



3. Les cercles sont **sécants**

$$r_1 - r_2 < \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < r_1 + r_2$$

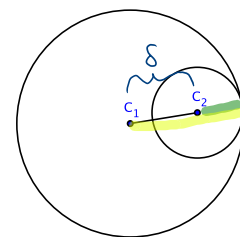
2 points d'intersection



4. Les cercles sont **tangents intérieurement**

$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = r_1 - r_2$$

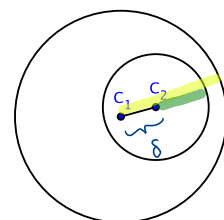
1 point d'intersection



5. Les cercles sont **disjoints intérieurement**

$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < r_1 - r_2$$

aucun point d'intersection



Exemple

Soit $\gamma_1 : (x-1)^2 + y^2 = 5$ et $\gamma_2 : (x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$.

a) Quelle est la position relative de ces deux cercles ?

$$C_1(1;0) \text{ et } r_1 = \sqrt{5} \text{ u} \quad \text{et} \quad C_2(6;5) \text{ et } r_2 = 5 \text{ u}$$

$$\vec{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{C_1 C_2}\| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cong 7,07 \text{ u}$$

$$\left. \begin{array}{l} r_1 + r_2 = \sqrt{5} + 5 \cong 7,24 \\ r_2 - r_1 = 5 - \sqrt{5} \cong 2,76 \end{array} \right\} \Rightarrow 2,76 < 7,07 < 7,24 \Rightarrow \underline{\text{sécants}}$$

b) Calculer les coordonnées des éventuels points d'intersection.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 5 \\ (x-6)^2 + (y-5)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 5 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 10y + 25 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x - 10y + 36 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \\ -x^2 - y^2 + 12x + 10y - 36 = 0 \\ \hline 10x + 10y - 40 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \quad (*) \end{array}$$

$$y = -x + 4$$

dans 1^{ère}

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + (-x+4)^2 - 2x - 4 &= 0 \\ x^2 + x^2 - 8x + 16 - 2x - 4 &= 0 \\ 2x^2 - 10x + 12 &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2 \Rightarrow y = -2 + 4 = 2 \Rightarrow \underline{I(2;2)} \\ 3 \Rightarrow y = -3 + 4 = 1 \Rightarrow \underline{J(3;1)} \end{cases}$$

1. équations développées
2. soustraire une équation de l'autre
3. isoler x ou y et substituer dans une équation de cercle

c) Quelle est l'équation de la droite passant par les deux points d'intersection ?

$$\vec{IJ} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{d}_{IJ} \Rightarrow (IJ) : x + y + C = 0$$

$$I \in (IJ) \Rightarrow 2 + 2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{(IJ) : x + y - 4 = 0}$$

$$C = -4$$

C'est la droite obtenue à l'étape 2b) (*)

