

Chapitre 2

Fonctions quadratiques

Définition :

Une fonction quadratique est une fonction du 2^{ème} degré :

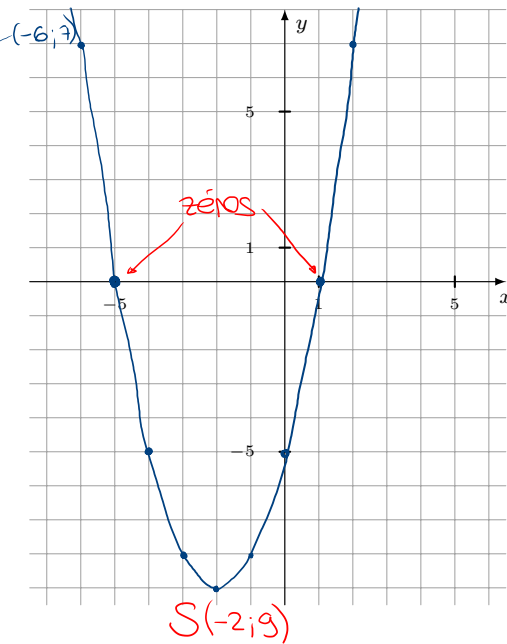
$f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ (sinon pas du 2^{ème} degré.)

Le graphe d'une fonction quadratique est une **parabole**.

Exemple :

$f(x) = x^2 + 4x - 5$

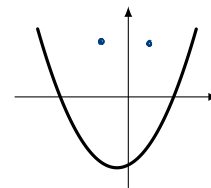
x	$f(x)$
-6	$(-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 5 = 36 - 24 - 5 = 7$
-5	$(-5)^2 + 4 \cdot (-5) - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$
-4	$(-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 5 = 16 - 16 - 5 = -5$
-3	$(-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 5 = 9 - 12 - 5 = -8$
-2	$(-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$
-1	$(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 5 = 1 - 4 - 5 = -8$
0	$0^2 + 4 \cdot 0 - 5 = -5$
1	$1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$
2	$2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 4 + 8 - 5 = 7$



Parabole **convexe** ou **concave** :

- Si $a > 0$, la parabole est **convexe**

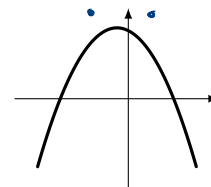
a positif ☺



- Si $a < 0$, la parabole est **concave**

a négatif ☹

(cave avec une voûte ^)



Exemples :

a) $f(x) = -3x^2 + 8x + 7$
 $a = -3 < 0$ ☹ concave

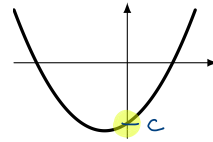
c) $f(x) = 8 - 5x - x^2 = -x^2 - 5x + 8$
 $a = -1 < 0$ ☹ concave

b) $f(x) = x^2 - 9$
 $a = 1 > 0$ ☺ convexe

d) $f(x) = (3 - 2x)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2x + (-2x)^2$
 $= 9 - 12x + 4x^2$
 $a = 4 > 0$ ☺ convexe
 $= 4x^2 - 12x + 9$

Ordonnée à l'origine :

- C'est l'image de 0. c'est à dire $f(0)$ / $x=0$
- C'est l'intersection de la parabole avec l'axe Oy .
- Par calcul : $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$



Exemples : Déterminer l'ordonnée à l'origine des fonctions de la page précédente :

- a) 7 b) -9 c) 8 d) 9

Zéro(s) :

- C'est l'/les intersection(s) de la parabole avec l'axe Ox .
- Par calculs : on résout l'équation du 2^{ème} degré $f(x) = 0$.

Exemple : Déterminer les zéros de la fonction de la page précédente $f(x) = x^2 + 4x - 5$:

Sur le graphique : -5 et 1

Par calculs : $x^2 + 4x - 5 = 0$ ($a=1$ $b=4$ $c=-5$)

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le nombre de zéro(s) dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:



- Si $\Delta < 0$:

Aucun zéro

aucun point d'intersection avec Ox



Exemples : a) $f(x) = x^2 + 4$

$$a=1 \quad b=0 \quad c=4$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 - 16 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

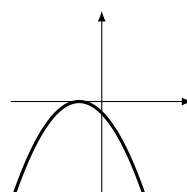
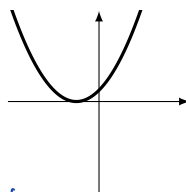
b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

$$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - 4(-2)(-4) \\ &= 9 - 32 \\ &= -23 < 0 \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$:

Un zéro (double) : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

un point d'intersection avec Ox.
c'est le sommet de la parabole



Exemples : a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \\ = 36 - 36 = 0$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

$$Z(-3; 0)$$

b) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(-1) \\ = 4 - 4 = 0$$

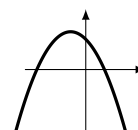
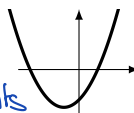
$$x_1 = x_2 = -\frac{-2}{-2} = -1$$

$$Z(-1; 0)$$

- Si $\Delta > 0$:

2 zéros : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

deux points d'intersection avec Ox



Exemples : a) $f(x) = -x^2 + x + 6$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 \\ = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} + \frac{4}{-2} = -2 \\ - \frac{6}{-2} = 3 \end{cases}$$

b) $f(x) = 6x^2 + x - 15$

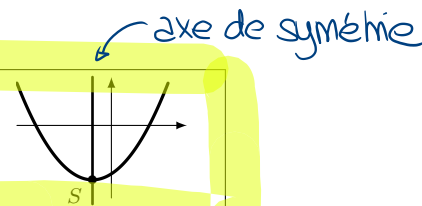
$$\Delta = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-15) \\ = 1 + 360 = 361$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 19}{12} = \begin{cases} + \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ - \frac{20}{12} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Sommet de la parabole :

- Les coordonnées du sommet S de la parabole sont :

$$S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$



Exemple : Déterminer le sommet de la fonction de la première page $f(x) = x^2 + 4x - 5$:

Sur le graphique : $S(-2; -9)$

Par calculs :

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2 \\ f(-2) &= (-2)^2 + 4(-2) - 5 = -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(-2; -9)$$

Remarque : Le sommet se trouve sur l'axe de symétrie $x = -\frac{b}{2a}$ de la parabole.

(S'il y a deux zéros : ici $x_1 = -5$ et $x_2 = 1 \Rightarrow x = \frac{-5+1}{2} = -2$)