

Quelques définitions

Soit $p(x)$ un polynôme de degré n et de variable de x

1. la valeur numérique de $p(x)$ en a est $p(a)$, avec $a \in \mathbb{R}$

Exple : $p(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 48$

sa valeur num. en -1 est $p(-1) = (-1)^3 + 5(-1)^2 - 8(-1) - 48$
 $= -1 + 5 + 8 - 48 = -36$

-36
est la
valeur numérique
de $p(x)$ en -1

2. Un zéro du polynôme $p(x)$ est un nombre z tel $p(z) = 0$ avec $z \in \mathbb{R}$

Exple : même polynôme.

3 est un zéro de $p(x)$ car $p(3) = 3^3 + 5 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 - 48$
 $= 27 + 45 - 24 - 48 = 0$

-4 " " " car $p(-4) = (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 8 \cdot (-4) - 48$
 $= -64 + 80 + 32 - 48 = 0$

mais 0 n'est pas un zéro car $p(0) = 0^3 + 5 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 48 = -48$

Ex 2.3.5 $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$

$$p(3) = 35$$

$$p(0) = -7$$

$$p(-2) = -45$$

$$p(x) = -x^2 + x + 1$$

$$p(-2) = -5 = -(-2)^2 + (-2) + 1 = -4 - 2 + 1$$

$$p(2) = -1 = -2^2 + 2 + 1 = -4 + 2 + 1$$

Divisibilité par $x-a$

Déf: Un polynôme $p(x)$ est divisible par $d(x)$ si le reste de la division est nul

ex 2.3.8 a) $a(x) = 4x^3 - 10x^2 + 11x - 5$

	4	-10	11	-5	
1		4	-6	5	
	4	-6	5	0	

$b(x) = x-1$

← reste = 0

⇒ $a(x)$ est divisible par $b(x)$.

b) $a(x) = 9x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$

	9	1	-1	1	2	
-2		-18	34	-66	130	
	9	-17	33	-65	132	

$b(x) = x+2$

← reste = 132

⇒ $a(x)$ n'est pas divisible par $b(x)$.

Calculer la valeur numérique de $a(x)$ en

a) 1

$a(1) = 4 - 10 + 11 - 5 = 0$

↑
un zéro de $a(x)$

b) -2

$b(-2) = 132$

Thm. du reste : Le reste de la division de $p(x)$ par $x-a$ est la valeur numérique de $p(x)$ en a , $a \in \mathbb{Z}$

Autrement dit reste = $p(a)$

preuve : $p(x) = (x-a) \cdot q(x) + r$ (égalité fondamentale)

$$p(a) = \underbrace{(a-a)}_0 \cdot q(a) + r$$

$$\Rightarrow p(a) = r$$

CQFD ou $\#$

Thm de divisibilité : $p(x)$ est divisible par $x-a \Leftrightarrow p(a) = 0$ (reste = 0)
 $\Leftrightarrow a$ est un zéro de $p(x)$

Exple : même polynôme que plus haut : $p(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 48$ est divisible par $(x-3)$ et par $(x+4)$

Rem : Les zéros d'un polynôme sont des diviseurs du terme constant.

2.3.12 a) $p(x) = 2x^3 - 14x + 12$ candidats : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$$p(1) = 2 - 14 + 12 = 0 \quad \checkmark$$

$$p(2) = 2 \cdot 8 - 14 \cdot 2 + 12 = 0 \quad \checkmark$$

$$p(3) = 2 \cdot 27 - 14 \cdot 3 + 12 = 54 - 42 + 12 = 24 \neq 0$$

$$p(-3) = -54 + 42 + 12 = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ les zéros sont 1, 2 et -3