

En généralisant cette méthode on obtient la formule : $\boxed{y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}}$

Reprenons l'**exemple** précédent :

Déterminer les équations des tangentes à $\gamma : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$ de pente $m = 2$.

$$C(-3; 2) \text{ et } r = \sqrt{20}$$

$$t_{1,2} : y - 2 = 2(x + 3) \pm \sqrt{20}\sqrt{2^2 + 1}$$

$$y - 2 = 2x + 6 \pm \underbrace{\sqrt{20}\sqrt{5}}_{\sqrt{100} = 10}$$

$$y - 2 = 2x + 6 \pm 10$$

$$y - 2 = \begin{cases} 2x + 16 \\ 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} t_1 : & 2x - y + 18 = 0 \\ t_2 : & 2x - y - 2 = 0 \end{aligned}$$

4.3 Tangentes par un point extérieur au cercle

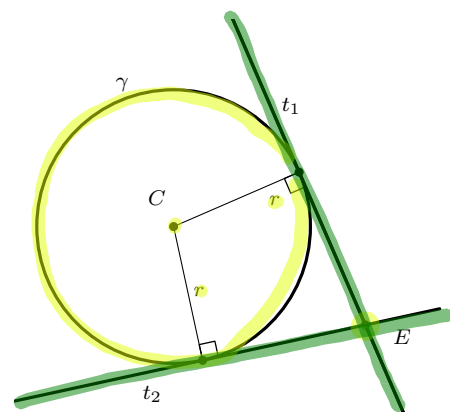
Soit γ un cercle de centre C et de rayon r .

Soit $E(e_1; e_2)$ un point à l'extérieur du cercle.

Il y a forcément deux tangentes au cercle passant par E .

La méthode que nous allons voir permet de trouver les tangentes non verticales.

On gardera en tête que si cette méthode n'aboutit qu'à une seule tangente, c'est que la deuxième est la droite verticale passant par E .



Pour déterminer des équations des deux tangentes t_1 et t_2 passant par un point E extérieur au cercle :

1) on utilise la forme

$$\underline{y = mx + h} \Leftrightarrow \underline{mx - y + h = 0} \quad \text{2 inconnues } m \text{ et } h$$

2) et pour déterminer h et m on utilise les informations suivantes :

$$\underline{E \in t} \text{ et } \underline{\delta(C; t) = r}$$

Exemple

Déterminer les équations des tangentes à $\gamma : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$ passant par $E(7; 12)$.

On vérifie que E est extérieur au cercle : $\|\vec{CE}\| > r$ avec $C(-3; 2)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u

$$\vec{CE} = \begin{pmatrix} 7+3 \\ 12-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{CE}\| = \sqrt{100+100} = \sqrt{200} > \sqrt{20} \quad \checkmark$$

$$1) \quad y = mx + h \Leftrightarrow mx - y + h = 0 \quad (2 \text{ inc. } m \text{ et } h)$$

$$2) \quad \bullet \quad E(7; 12) \in t \Rightarrow m \cdot 7 - 12 + h = 0 \Leftrightarrow 7m - 12 + h = 0 \Leftrightarrow h = -7m + 12$$

substitution
 $\Rightarrow$
dans 1) $\otimes$ $mx - y - 7m + 12 = 0 \quad (1 \text{ inc. } m)$

$$\bullet \quad \delta(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|m \cdot (-3) - 2 - 7m + 12|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{20} \quad | \cdot \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |-3m - 2 - 7m + 12| = \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |-10m + 10| = \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow -10m + 10 = \pm \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1} \quad | (\quad)^2$$

$$\Leftrightarrow (-10m + 10)^2 = 20(m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 100m^2 - 200m + 100 = 20m^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow 80m^2 - 200m + 80 = 0 \quad | : 40$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \quad \Delta = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \Rightarrow h_1 = -7 \cdot 2 + 12 = -2 \\ \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = -7 \cdot \frac{1}{2} + 12 = -\frac{7}{2} + \frac{24}{2} = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1: y = 2x - 2 \Leftrightarrow \underline{2x - y - 2 = 0} \\ t_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \Leftrightarrow \underline{x - 2y + 17 = 0} \end{cases}$$

En généralisant la méthode on peut déterminer les pentes des tangentes en résolvant l'équation suivante :

$$e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

puis on calcule h en utilisant le fait que $E \in t$.

$E(7; 12)$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20 \Rightarrow C(-3; 2) \text{ et } r = \sqrt{20} \text{ u}$$

$$\Rightarrow 12 - 2 = m(7 + 3) \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$10 = 10m \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$10 - 10m = \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2 + 1} \quad | (\)^2$$

$\vdots$ idem p. 11

$$m = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + h \Rightarrow E(7; 12) \in t_1 : 12 = 2 \cdot 7 + h \Leftrightarrow h = -2 \Rightarrow t_1 : y = 2x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + h \Rightarrow E(7; 12) \in t_2 : 12 = \frac{1}{2} \cdot 7 + h \Leftrightarrow h = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \\ \Leftrightarrow x - 2y + 17 = 0$$

! isoler la $\sqrt{}$ avant d'élever au carré